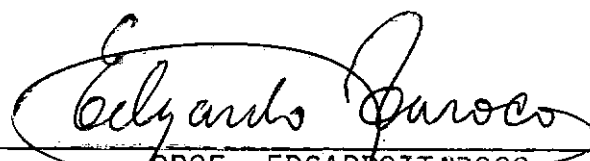


UM ELEMENTO FINITO PARA PLACAS E CASCAS
USANDO A TEORIA DE KIRCHHOFF-LOVE

BORIS KRAJNC ALVES

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA MECÂNICA


APROVADA POR:



PROF. EDGARDO ITAROCO
(PRESIDENTE)



PROF. JOSÉ HERSKOVITS NORMAN



PROF. RAUL A. FEIJÓO



PROF. CARLOS ALBERTO DE ALMEIDA

RIO DE JANEIRO - RJ - BRASIL

JULHO DE 1985

ALVES, BORIS KRAJNC

Um Elemento Finito para Placas e Cascas Usando a Teoria de Kirchhoff-Love (Rio de Janeiro) 1985.

xiv, 181 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Mecânica, 1985)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Cascas I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que colaboraram na elaboração deste trabalho.

Aos professores Edgardo Taroco e José Herskovits Norman pela orientação e apoio sem os quais este trabalho não poderia ser realizado.

Ao professor Raul A. Eeijão pelo prestimoso auxílio e orientação dedicados em diversas etapas da elaboração deste trabalho.

Ao professor Carlos Alberto de Almeida pela participação no comitê de dissertação desta tese.

Ao Marcelo K. Alves por seu incontável apoio e estímulo a mim dedicados. Sua Tese de Mestrado foi, por muitas vezes, grande fonte de inspiração.

Ao Jayme Gouveia por excelentes contribuições à parte computacional da tese e pela utilização do sistema de Desenvolvimento de Programas (SDP).

Aos meus amigos e colegas de pós-graduação pelo estímulo e apoio a mim dedicados.

À equipe do LNCC-CNPq, de uma forma geral, pela utilização de sua infraestrutura, viabilizando este trabalho.

À Eneida pela competência, dedicação e incontável paciência com que datilografou esta tese.

À Luciana por seu auxílio na redação dos textos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Finalmente agradeço à minha família, em especial aos meus pais a quem dedico esta tese.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestrado em Ciências (M.Sc.)

UM ELEMENTO FINITO PARA PLACAS E CASCAS
USANDO A TEORIA DE KIRCHHOFF-LOVE

Boris Krajnc Alves

Julho de 1985

Orientadores: Edgardo Taroco, José Herskovits Norman

Programa: Engenharia Mecânica

RESUMO

Consiste este trabalho na formulação e desenvolvimento de um elemento finito para placas e cascas usando-se a teoria de Kirchhoff-Love. Com o propósito de se garantir a continuidade das rotações das normais à superfície média ao longo da casca, adotou-se uma interpolação por polinômios de Hermite para os deslocamentos transversais e quadrática incompleta para os deslocamentos longitudinais. O elemento finito formulado consistiu em um elemento retangular de 32 graus de liberdade e conforme.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

UM ELEMENTO FINITO PARA PLACAS E CASCAS
USANDO A TEORIA DE KIRCHHOFF-LOVE

Boris Krajnc Alves

JULY, 1985

Chairmen: Edgardo Taroco, José Herskovits Norman
Department: Mechanical Engineering

ABSTRACT

The purpose of this work is to formulate a finite-element for plates and shells using the theory of Kirchhoff-Love. In order to guarantee the continuity of rotations for the middle surface normal vectors, it was used Hermite interpolation functions for the transverse displacements and incomplete quadratic polynomials for the in-plane displacements. The finite-element formulated were rectangular, conforming and possessed 32 d.o.f.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - O PROBLEMA DA ELASTICIDADE. FORMULAÇÃO DO PRINCÍPIO DAS POTÊNCIAS VIRTUAIS	3
II.1. Introdução	3
II.2. Cinemática. Conceitos Básicos em Mecânica do Contínuo	4
II.3. Solicitações Associadas ao Modelo. O Princípio das Potências Virtuais	14
CAPÍTULO III - CASCAS. TEORIA DE KIRCHHOFF-LOVE	23
III.1. Cascas. Definições Básicas	23
III.2. Descrição de Campos Vetoriais e Tensoriais em Termos das Coordenadas da Superfície Média e Distâncias ao Longo de sua Normal. Decomposição Aditiva	27
III.3. Hipóteses Cinemáticas de Kirchhoff-Love	40
III.4. O Problema de Kirchhoff-Love	52
III.5. Relação Constitutiva - Materiais Isotrópicos	61
CAPÍTULO IV - FORMULAÇÃO DA TEORIA DE CASCAS EM COMPONENTES	64
IV.1. Generalidades	64
IV.2. Superfície Média - Propriedades Intrínsecas	64
IV.3. O Espaço de Cascas	72

IV.4. Deformações Generalizadas	74
IV.5. Componentes Físicas	77
IV.6. Tensões Generalizadas	86
IV.7. Relação Constitutiva	88
IV.8. Formulação Matricial do Princípio dos Trabalhos Virtuais	90
 CAPÍTULO V - SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PROBLEMA DE KIRCHHOFF-LOVE. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	 95
V.1. Solução Aproximada. Generalidades	95
V.2. O Método dos Elementos Finitos. O Elemento desenvolvido	99
 CAPÍTULO VI - TESTES DE DESEMPENHO DO ELEMENTO	114
VI.1. Generalidades	114
VI.2. Problemas Desenvolvidos	115
 CAPÍTULO VII - CONCLUSÃO	157
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	163
 APÊNDICE A - PLACAS E CASCAS ANALISADAS. PROPRIEDADES DAS SUPERFÍCIES MÉDIAS	 167
 APÊNDICE B - INTEGRAIS DA RELAÇÃO CONSTITUTIVA	174
 APÊNDICE C - A FASE COMPUTACIONAL. UMA EXPERIÊNCIA EM PROGRAMAÇÃO MODULAR E ESTRUTURADA	 178

SIMBOLOGIA

- $\partial \Sigma_m$ - contorno da superfície média da casca
 Σ - configurações da casca
 Σ_m - superfície média da casca
 R_α - raio de curvatura principal da superfície média, direção α
 V - espaço vetorial associado ao espaço euclidiano
 X_0 - ponto pertencente à superfície média
 X - ponto pertencente à casca
 $h(X_0)$ - espessura da casca no ponto $X_0 \in \Sigma_m$
 $d(X, \Sigma_m)$ - distância de $X \in \Sigma$ à superfície média da casca
 $PT(X_0)$ plano tangente à superfície média no ponto $X_0 \in \Sigma_m$
 $\pi(X_0)$ - operador de projeção plana
 $\underline{n} \otimes \underline{n}$ - operador de projeção ortogonal
 ξ - distância de um ponto $X \in \Sigma$ à superfície média
 \underline{n} - vetor normal à superfície média

- $\underline{v}(X)$ - campo de ações de movimento da casca
 $\underline{v}_n(X_0)$ - componente normal do campo de velocidades da casca
 $\underline{v}_t(X_0)$ - componente plana do campo de velocidades.
 $T(X)$ - campo tensorial definido em Σ ; tensor de tensões de Cauchy
 T_t - componente plana do campo tensorial $T(X)$
 T_s, T_s^* - componentes cisalhantes do campo tensorial $T(X)$
 T_n - componente normal do campo tensorial $T(X)$
 $E(X)$ - tensor de deformações infinitesimais
 $\text{Lin}(v, v)$ - espaço vetorial das transformações lineares de v em v
 Sim - espaço vetorial dos tensores simétricos
 Asim - espaço vetorial dos tensores assimétricos
 grad - operador gradiente espacial
 Grad - operador gradiente material
 $\nabla \cdot$ - operador gradiente superficial
 $(\cdot)^S$ - parte simétrica do tensor
 $L(X_0)$ - segmento normal à superfície média
 $\underline{\theta}(X_0)$ - taxa de rotação da normal à superfície média
 B^t - configuração do corpo no instante t
 ∂B_f - fronteira do corpo sob prescrição de esforços

- ∂B_v - fronteira do corpo sob prescrição de ações de movimentos
- $\overset{o}{B}$ - interior do corpo
- D, D^* - operador de deformações e o adjunto
- D - espaço vetorial de deformações
- V - espaço vetorial de ações de movimento
- U - espaço vetorial de deslocamentos
- $\text{Var } V$ - espaço vetorial de ações de movimentos virtuais
- $\text{Var } U$ - espaço vetorial de deslocamentos virtuais
- $\text{Kin } V$ - conjunto de ações de movimento admissíveis
- $\text{Kin } U$ - conjunto de deslocamentos admissíveis
- $\chi(X_0, \xi)$ - transformação de coordenadas locais/globais
- $\chi(X_0)$ - taxa de mudança de curvatura
- $\epsilon(X_0)$ - deformação plana generalizada
- \tilde{I}_d - operador identidade sobre o plano tangente
- P_t - potência virtual das tensões planas
- P_s - potência virtual das tensões cisalhantes
- P_N - potência virtual das tensões normais
- PVI - potência virtual interna
- PVE - potência virtual externa

- TKL - teoria de Kirchhoff-Love
- K-L - Kirchhoff-Love
- $R(\cdot)$ - imagem de operadores
- $\underline{\hat{a}}_v$ - vetor unitário normal ao contorno da superfície média
- \underline{a}_s - vetor unitário tangente ao contorno da superfície média
- \underline{a}_α - vetores tangentes à superfície média ao longo das linhas paramétricas
- X_0^i - pontos de descontinuidade da normal \underline{a}_v em $\partial\Sigma_m$
- E - módulo de Young
- ν - coeficiente de Poisson
- δ_α^β - delta de Kronecher
- $a_{\alpha\beta}$ - tensor métrico, componentes covariantes
- $b_{\alpha\beta}$ - tensor de curvatura, componentes covariantes
- $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}, \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ - símbolos de Christoffel
- U, V, W - componentes físicas dos deslocamentos
- $d\Sigma$ - elemento de volume da casca
- $\underline{a}_{<\alpha>}$ - base física
- A - componente (1,1) do tensor métrico na base física
- B - componente (2,2) do tensor métrico na base física
- \underline{U} - vetor de deslocamentos
- \underline{f} - vetor de solicitações

- $\underline{\varepsilon}$ - vetor de deformações generalizadas
- \underline{S} - vetor de tensões generalizadas
- \mathbb{L} - operador de deformações generalizadas
- \mathbb{D} - matriz constitutiva generalizada
- \mathbb{B} - matriz de deformações
- K_α - curvatura principal da superfície média ($= 1/R_\alpha$)
- $w_1(s), w_2(s)$ - polinômios de Lagrange lineares
- $\psi_i(\xi, \eta)$ - polinômios quadráticos incompletos
- $\Phi_i(s)$ - polinômios de Hermite
- J - matriz Jacobiana na transf. de coord. do elemento referência para o elemento finito
- \mathbb{N} - matriz de interpolação
- $\mathbb{K}^{(e)}, \mathbb{K}$ - matriz de rigidez elementar/global
- $\mathbb{F}^{(e)}, \mathbb{F}$ - vetor de solicitações elementar/global
- $q(e), \underline{q}$ - vetor de graus de liberdade elementar/global
- $\Lambda^{(e)}$ - conectividade dos graus de liberdade elementares com os globais
- $\Omega^{(e)}$ - conectividade dos graus de liberdade globais com os elementares
- \wedge - conectivo lógico "e"
- \wedge - produto vetorial

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Incontáveis são as aplicações em engenharia das teorias de cascas finas. Muitas destas teorias possuem princípios básicos formulados já há várias décadas, entretanto a grande dificuldade encontrada têm sido a solução dos sistemas resultantes. O problema de cascas é por demais sofisticado e soluções analíticas existem mas, em sua maior parte, para solicitações e geometrias bem particulares. O método dos elementos finitos supre esta deficiência fornecendo-nos soluções numéricas aproximadas de problemas onde resultados analíticos são desconhecidos ou sobremaneira complicados.

Têm-se como objetivo básico deste trabalho a formulação de um elemento finito, para cascas finas, usando-se a teoria de Kirchhoff-Love.

Deu-se início ao trabalho com uma pesquisa de polinômios de interpolação para os deslocamentos de modo a se obter um elemento conforme. Adotou-se uma interpolação por polinômios de Hermite para os deslocamentos transversais e quadráticos incompletos para os longitudinais. Implementou-se um programa geral

para placas e cascas sendo testados diversos exemplos para placas, cascas cilíndricas, esféricas e toroidais. Ótimos resultados foram obtidos sendo entretanto verificado, para alguns casos, uma lentidão na convergência se comparada com outros elementos fornecidos na literatura.

CAPÍTULO II

O PROBLEMA DO EQUILÍBRIO. FORMULAÇÃO DO PRINCÍPIO DAS POTÊNCIAS VIRTUAIS

II.1. INTRODUÇÃO

Almejamos neste capítulo expor os conceitos básicos e as definições necessárias ao desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

No desenvolvimento do problema do equilíbrio seguiremos uma orientação variacional sendo introduzidas as noções de esforços através da noção de dualidade, sistemática esta desenvolvida em GERMAIN (1-4). Sob esta orientação dois conceitos são considerados básicos:

- A escolha do espaço vetorial das ações de movimento possíveis ao modelo, definindo conseqüentemente a riqueza da modelagem introduzida.

- A definição dos conceitos de deformação associados a

modelagem.

A teoria de cascas, uma teoria evidentemente bi-dimensional, seguirá este mesmo enfoque. Entretanto usaremos de resultados da teoria tridimensional e de hipóteses geométricas e cinemáticas de forma a definirmos coerentemente o espaço das ações do movimento possíveis e o das deformações generalizadas associadas.

II.2. CINEMÁTICA. CONCEITOS BÁSICOS EM MECÂNICA DO CONTÍNUO

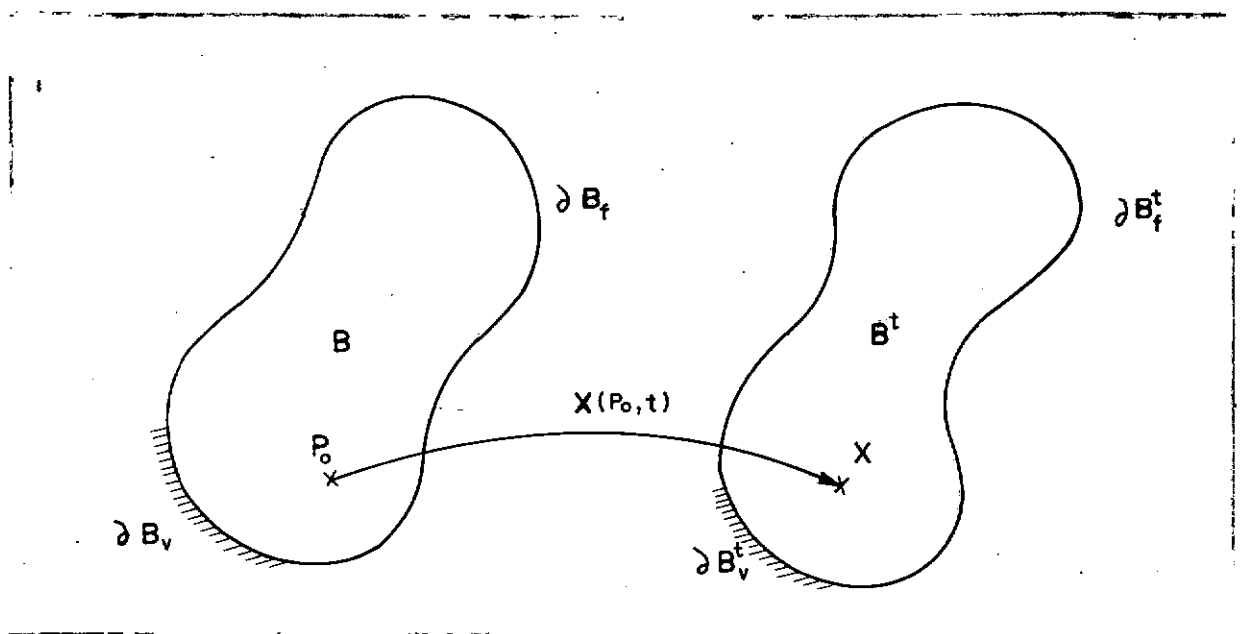


Figura II.1 - Corpo material, configurações

Segundo a formulação da Mecânica do Contínuo, um corpo material é representado através de uma das possíveis configurações da qual ocupa no espaço euclidiano tridimensional. Para simplificar nossa apresentação adotaremos a configuração inicial como referência e a denotaremos por (B^r) .

Aos pontos $P \in B^r$ denominamos pontos materiais.

Introduz-se o conceito de deformação através da aplicação:

$$f : B^r \rightarrow \epsilon \quad ; \quad \epsilon : \text{espaço euclidiano tridimensional} \quad (\text{II.1})$$

Tal que:

$$X = f(P) \quad X \in \epsilon$$

f suficientemente regular , bijetiva

$$\text{e } \det (\text{Grad } f(P)) > 0 \quad \forall P \in B^r$$

Denotaremos:

(i)

$B^d = f(B^r) : B^d$ configuração deformada do corpo.
(ante a Aplicação $f(\cdot)$)

$$f(B^r) = \{X \in \epsilon \mid X = f(P) ; \forall P \in B^r\}$$

(ii)

$$F(P) = \text{Grad } (f(P)) \quad \forall P \in B^r \quad (\text{II.2})$$

(F : gradiente da deformação)

(iii)

$$\underline{u}(P) = f(P) - P \quad \forall P \in B^r \quad (\text{II.3})$$

($\underline{u}(P)$: campo de deslocamentos em relação à
configuração de referência)

Analogamente temos:

$$\text{Grad } (\underline{u}(P)) = F(P) - I \quad (\text{II.4})$$

Aplicando-se em $F(P)$ a decomposição Polar GURTIN (6) têm-se:

$$F(P) = R(P) U(P) = V(P) R(P) \quad (\text{II.5a})$$

Sendo:

$$U(P) = \sqrt{F^T F} \quad (\text{II.5b})$$

$$V(P) = \sqrt{F F^T} \quad (\text{II.5c})$$

$$R \in \text{Orth} \quad (\text{II.5d})$$

Numa vizinhança de $P \in B^r$ e raio $\delta(\text{VIZ}(P, \delta))$ contida em B^r têm-se:

$$f(q) = f(p) + F(p) (p-q) + o(\delta)^{(*)} ; q \in \text{VIZ}(P, \delta) \subset B^r \quad (\text{II.6})$$

Nesta vizinhança $f(\cdot)$ comporta-se, ao menos do erro $o(\delta)$, como uma deformação homogênea.

(*) Dizemos que $f(u) = o(u)$ se $\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} \frac{\|f(u)\|}{\|u\|} = 0$

Seguindo-se esta Ordem de Aproximação, U e V definidos em (II.5b-c) determinam o alongamento e distorção de fibras nes ta vizinhança e R (II.5d) associa-se à sua rotação rí \tilde gida (em torno de $P \in B^r$) GURTIN (6).

Convém, entretanto, definir os tensores:

$$C = U^2 \quad ; \quad C : \text{tensor de deformações de Cauchy Green à direita} \quad (II.7)$$

$$B = V^2 \quad ; \quad B : \text{tensor de deformações de Cauchy Green à esquerda} \quad (II.8)$$

Dizemos que uma deformação é rí \tilde gida se esta preserva dis tância, isto é:

$$f \text{ é rí \tilde gida} \leftrightarrow |f(q) - f(p)| = |q - p| \quad \forall p, q \in B^r \quad (II.9a)$$

f pode ser representada por GURTIN (6):

$$f(q) = f(p) + R(p-q) \quad (II.9b)$$

$$R \in \text{Orth} \quad ; \quad R \text{ constante}$$

Supondo f , deformação rí \tilde gida **infinitesimal** têm-se:

$$F \in \text{Orth} \quad ; \quad F \text{ constante}$$

$$\text{Grad}(\underline{u}) = F - I$$

$$C = F^T F = \text{Grad}(\underline{u}) + (\text{Grad}(\underline{u}))^T + (\text{Grad}(\underline{u}))^T \cdot (\text{Grad}(\underline{u}))$$

mas

$$F F^T = F^T F = I$$

donde:

$$\text{Grad}(\underline{u}) + (\text{Grad}(\underline{u}))^T + (\text{Grad}(\underline{u}))^T \cdot (\text{Grad}(\underline{u})) = 0$$

A deformação sendo infinitesimal:

$$|\text{Grad}(\underline{u})| = \delta$$

teremos:

$$\text{Grad}(\underline{u}) = -(\text{Grad}(\underline{u}))^T - o(\delta)$$

Motiva-se a definição:

Campo de deslocamentos de uma deformação rígida infinitesimal \bar{e} representado por:

$$\underline{u}(p) = \underline{u}(q) + W(p-q) \quad (\text{II.10})$$

$W \in \text{Antisim. ; constante}$

Seja o tensor

$$C-I = \text{Grad}(\underline{u}) + \text{Grad}(\underline{u})^T + \text{Grad}(\underline{u})^T \cdot \text{Grad}(\underline{u})$$

Para uma deformação infinitesimal teremos:

$$C-I = 2 E + o(\delta)$$

$$E = \frac{(\text{Grad } (\underline{u}) + \text{Grad } (\underline{u})^T)}{2} ; \text{ tensor de deformações infinitesimais} \quad (\text{II.11})$$

E, determinando o alongamento e a distorção de fibras nu ma deformação infinitesimal.

Define-se movimento $(X(P,t))$ como a aplicação:

$$X : B^r \times \mathbb{R} \rightarrow \epsilon \quad (\text{II.12})$$

Sendo $\underline{x} = X(P,t)$; a posição ocupada pela partícula $P \in B^r$ no instante t .

$X(\cdot, t)$ - definindo a cada instante $t \in \mathbb{R}$ uma deformação
(suficientemente regular)

denotamos:

(i)

$$F(P,t) = \text{Grad } (X(P,t)) ; P \in B^r , t \in \mathbb{R}$$

(ii)

$$B^t = X(B^r, t) = \{ \underline{x} \in \epsilon \mid \underline{x} = X(P,t) ; \forall P \in B^r \}$$

denominamos B^t de configuração do corpo B no instante t .

Ao campo vetorial:

$$\dot{\tilde{X}}(P,t) = \frac{\partial}{\partial t} X(P,t) \text{ denominamos de campo de velocidades (II.13)}$$

Usando-se da aplicação inversa:

$$X^{-1}(\cdot, t) : B^t \rightarrow B^r$$

tal que:

$$P = X^{-1}(X, t)$$

definimos a representação espacial do campo de velocidades por:

$$\underline{v}(X, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} X(P, t) \right) \circ X^{-1}(X, t) \quad (\text{II.14})$$

Seja $\text{grad}(\cdot)$ - operador gradiente em relação à configuração B no instante (t) (gradiente em relação à representação espacial do campo).

Definimos:

$$L(X, t) = \text{grad}(\underline{v}(X, t)) \quad (\text{II.15})$$

$$D(X, t) = \frac{1}{2} \left\{ L(X, t) + L(X, t)^T \right\} = (L(X, t))^{\text{sim}} \quad (\text{II.16})$$

$$W(X, t) = \frac{1}{2} \left\{ L(X, t) - L(X, t)^T \right\} = (L(X, t))^{\text{asim}} \quad (\text{II.17})$$

Sendo:

$(L(X, t))^{\text{asim}}$ - parte antisimétrica do tensor $L(X, t)$.

$(L(X,t))^{sim}$ - parte simétrica do tensor $L(X,t)$.

Supondo $X(P,t)$ um movimento rígido, $\underline{v}(X,t)$ pode ser representado por GURTIN (6):

$$\underline{v}(X,t) = \underline{v}(Y,t) + W(t) (X-Y) ; \forall X,Y \in B^t$$

$W(t)$ é Antisim.

(II.18)

Seja $X(P,t)$ um movimento, $Y \in VIZ(X,\delta) \subset B^t$ têm-se:

$$\underline{v}(Y,t) = \underline{v}(X,t) + L(X) (X-Y) + o(\delta) \quad (II.19a)$$

ou análogamente:

$$\underline{v}(Y,t) = \underline{v}(X,t) + D(X) (X-Y) + W(X) (X-Y) + o(\delta) \quad (II.19b)$$

Para uma vizinhança de um ponto $X \in B^t$ temos:

$D(X)$ = define a taxa de alongamento e distorção de fibras;

$W(X)$ = define a taxa de rotação da vizinhança em torno de X (spin). GURTIN (6)

Teremos em suma:

$E = (\text{Grad}(\underline{u}(p,t)))^{sim}$ - mede o alongamento e distorção de fibras numa deformação infinitesimal ($f : B^r \times \mathbb{R} \rightarrow B^t$)

(II.20a)

$D = (\text{Grad } (\underline{v}(X,t)))^{\text{sim}}$ - mede as taxas de alongamento e distorção de fibras (no instante t e ao longo da configuração B^t)

(II.20b)

$(\text{Grad } (u(P,t)))^{\text{asim}}$ - define a deformação infinitesimal rígida da vizinhança de $P \in B^r$ ao longo do movimento.

$X : B^r \times \mathbb{R} \rightarrow B^t$

(II.20c)

$W = (\text{Grad } (\underline{v}(X,t)))^{\text{asim}}$ - define as "taxas" de deformações rígidas (spin) da vizinhança de P .

(II.20d)

Na formulação variacional para o problema do equilíbrio as seguintes definições nos serão necessárias:

$(\overset{0}{B})$: interior do corpo $B = \{P \in B \mid P \notin \partial B\}$. (II.21a)

(∂B) : contorno do corpo B . (II.21b)

(∂B_v) : contorno de B sob prescrição de ações de movimento.

(II.21c)

(∂B_f) : contorno de B sob prescrição de esforços (externos).

(II.21d)

No presente trabalho sô serão levados em conta prescrições bilaterais sem atrito para o contorno ∂B_v FEIJÔO e TAROCO (7).

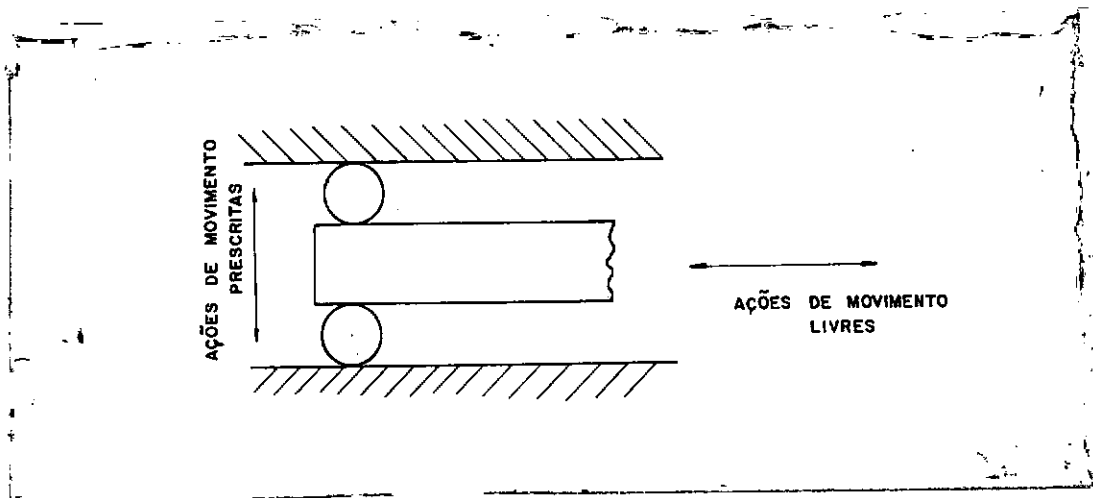


Figura II.2 - Apoios bilaterais

Os seguintes espaços nos serão úteis:

V : espaço vetorial dos campos de velocidades possíveis para o corpo B no instante t .

Um elemento de V sendo um campo vetorial suficiente regular definido em B^t

(II.22a)

$\text{Kin } V$: conjunto dos campos de velocidades que satisfazem as restrições (apoios bilaterais) cinemáticas em ∂B_V^t .

$$\text{Kin } V = \{ \underline{v}(X,t) \mid \underline{v}(X,t) \in V \wedge \underline{v}(X,t) = \tilde{\underline{v}}(X,t), \forall X \in \partial B_V^t \}$$

$$\tilde{\underline{v}}(X,t) : \text{ações de movimento prescritas em } \partial B_V^t$$

(II.22b)

$\text{Var } V$: conjunto das ações de movimento virtuais.

$$\text{Var } V = \{ \tilde{\underline{v}}(X,t) \mid \tilde{\underline{v}}(X,t) \in V \wedge \tilde{\underline{v}}(X,t) = \underline{0}, \forall X \in \partial B_V^t \}$$

(II.22c)

Para apoios bilaterais sem fricção podemos escrever

FEIJÓO e TAROCO (7).

$$\text{Kin } V = \underline{\bar{v}}_0(X,t) + \text{VAR } V \quad ; \quad \underline{\bar{v}}_0(X,t) \in \text{KIN } V \quad (\text{II.23})$$

Definimos:

$N(D)$: espaço nulo do operador $D(\cdot)$,

tomando-se:

$$D(\underline{v}(X,t)) = (\text{Grad } (v(X,t)))^{\text{sim}}$$

Segue-se de (II.20b):

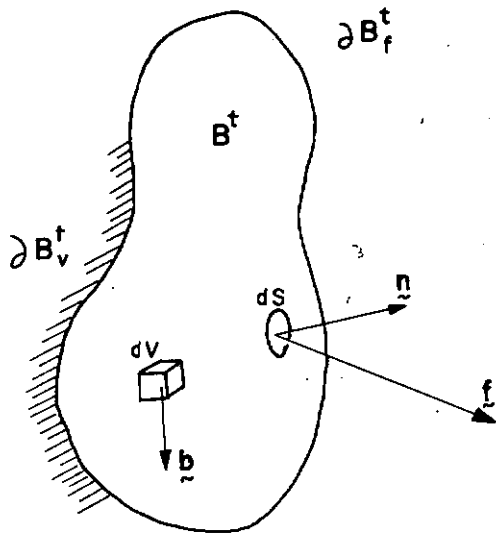
$$N(D) = \{ \underline{v}(X,t) \mid \underline{v}(X,t) \in V \text{ ; ação de movimento rígida} \} \quad (\text{II.24})$$

II.3. SOLICITAÇÕES ASSOCIADAS AO MODELO. O PRINCÍPIO DAS POTÊNCIAS VIRTUAIS

Para introduzir os conceitos de solicitações externas e internas a um corpo, dois são os enfoques básicos existentes:

No enfoque comumente usado às solicitações internas associa-se entidades vetoriais que descrevem as ações de contato (campos vetoriais de superfície) entre partes do corpo. Quanto às ações externas, estas originam-se do contato de corpos exteriores (campos vetoriais de superfície) e campos vetoriais relativos às solicitações à distância do exterior sobre o corpo.

(campos vetoriais definidos sobre o interior ($\overset{0}{B}$) do corpo).



\underline{b} : forças de corpo (densidade)
definidos em $\overset{0}{B}$ (interior de B)

\underline{f} : forças de superfície
definidas em ∂B_f^T

Figura II.3 - Forças de corpo e superfície definidas em B^t

Dentro de um enfoque mais abstrato, introduz-se o conceito de potência virtual ou o de trabalho virtual.

Dizemos que conhecemos as sollicitações aplicadas a B^t se conhecemos para cada $\hat{v} \in \text{Var } V$ sua potência virtual associada $P(\hat{v})$ GERMAIN (1).

Formalizando temos:

Conhecemos as solicitações aplicadas a um corpo (B) no instante t , para um espaço vetorial de movimentos virtuais (Var V), se identificamos uma aplicação linear e contínua ($\tilde{f}(\cdot)$) (funcional linear e contínuo) tal que:

$$P(\bar{v}) = \tilde{f}(\bar{v}(X,t)) \quad ; \quad \forall \bar{v}(X,t) \in \text{Var V} \quad (\text{II.25})$$

$P(\bar{v})$ - sendo a potência virtual associada a $\bar{v} \in \text{Var V}$

O conjunto de funcionais lineares e contínuos sobre Var V por sua vez define também um espaço vetorial: o espaço vetorial Dual de Var V correspondendo ao espaço de cargas.

O interessante a observar é que uma vez definido o espaço vetorial dos movimentos virtuais teremos definido conseqüentemente o espaço das solicitações compatíveis com nosso modelo (espaço dual em relação ao espaço dos movimentos virtuais).

O grau de refinamento de uma teoria a que se propõe a desenvolver assim como os tipos de solicitações ao qual se quer considerar é conseqüência imediata da definição do espaço dos movimentos virtuais, GERMAIN (1).

Levando-se em conta os efeitos das solicitações internas e externas ao corpo em sua configuração B^t realizamos as seguintes hipóteses:

(i) Potência interna pode ser representada por uma integral de volume:

$$P_{(i)}(\bar{v}) = \int_{B_T} p_{(i)}(\bar{v}) \, dB_t \quad ; \quad p_{(i)}(\bar{v}) - \text{densidade de potência interna} \quad (\text{II.26})$$

(ii) Potência externa devido às solicitações à distância ($P_{(d)}$) podendo ser representada por integral de volume:

$$P_{(d)} = \int_{B_t} p_{(d)}(\vec{v}) dB_t \quad ; \quad p_{(d)}(\vec{v}) - \text{densidade de potência à distância.} \quad (\text{II.27})$$

(iii) Potência externa devido às solicitações de contato por uma integral de superfície:

$$P_{(c)} = \int_{\partial B_t} p_{(c)}(\vec{v}) d\partial B_t \quad ; \quad p_{(c)}(\vec{v}) - \text{densidade de potência do contato} \quad (\text{II.28})$$

Destes conceitos poderemos formalizar o princípio das potências virtuais GERMAIN (1):

(i) Axioma das potências virtuais

"Um corpo B no instante t se encontra em equilíbrio, sob ação de solicitações externas a este, se para todo movimento virtual rígido a potência virtual interna é nula".

(ii) Princípio das potências virtuais

"Para um referencial galileano, a cada instante t, e para cada Parte P do Corpo B a potência virtual de todos os esforços internos e externos é nula".

Do princípio das potências virtuais e do axioma das potências virtuais pode-se demonstrar que a potência virtual interna está relacionada com a parte simétrica do gradiente de velocidades virtuais ($D(\vec{v})$) GERMAIN (1).

Da mesma forma que definimos os esforços externos através de suas potências, definiremos os esforços internos T (tensor de Cauchy) através do conceito de potência interna.

$$P_{(i)}(\bar{v}) = - \int_{B_t} (T \cdot D(\bar{v})) \, dB^t = \int_{B_t} p_{(i)}(\bar{v}) \, dB_t \quad (\text{II.29})$$

Segue-se:

$$P_{(i)}(\bar{v}) = \int_{B_t} (-T \cdot (\text{Grad } \bar{v})^{\text{sim}}) \, dB^t = - \int_{B_t} T \cdot (\text{Grad } \bar{v}) \, dB^t \quad (\text{II.30})$$

onde, sem perda de generalidade, supomos $T \in \text{Sim}$. Da relação:

$$T \cdot \text{grad}(\bar{v}) = \text{div} (T^T \bar{v}) - \bar{v} \cdot \text{div } T \quad (\text{II.31})$$

poderemos aplicar o teorema da divergência em (II.30):

$$P_{(i)}(\bar{v}) = \int_{B_t} \text{div } T \cdot \bar{v} \, dB^t - \int_{\partial B_f^t} T \underline{n} \cdot \bar{v} \, d\partial B^t \quad \begin{array}{l} \underline{n} \text{ normal} \\ \text{exterior sobre} \\ \partial B^t. \end{array} \quad (\text{II.32})$$

Este resultado sendo aplicado ao princípio das potências virtuais:

$$p_{(i)}(\bar{v}) + \dot{p}_{(e)}(\bar{v}) = 0 \quad ; \quad \forall \bar{v} \in \text{Var } V \quad (\text{II.33})$$

Resulta:

$$\int_{B^t} (\text{div } T \cdot \bar{v} + p_{(d)}(\bar{v})) \, dB^t + \int_{\partial B_f^t} p_{(i)}(\bar{v}) - T \underline{n} \cdot \bar{v} \, d\partial B^t = 0 \quad ;$$

$$\forall \bar{v} \in \text{Var } V \quad (\text{II.34})$$

Para que esta identidade seja satisfeita para todo $\bar{v} \in \text{Var } V$ é necessário que:

$$p_{(d)}(\bar{v}) = \underline{b} \cdot \bar{v} \quad ; \quad p_{(c)}(\bar{v}) = \underline{f} \cdot \bar{v}$$

Sendo recuperada a noção de força de volume (\underline{b}) e de superfície (\underline{f}). Segue-se:

$$\int_{B^t} (\text{div } T + \underline{b}) \cdot \bar{v} \, dB^t + \int_{\partial B_f^t} (\underline{f} - T \underline{n}) \cdot \bar{v} \, d\partial B^t = 0 \quad ;$$

$$\forall \bar{v} \in \text{Var } V \quad (\text{II.35})$$

da qual obtemos as equações de balanço locais:

$$\begin{cases} \text{div } T + \underline{b} = 0 & \text{em } B^t \end{cases} \quad (\text{II.36a})$$

$$\begin{cases} T \underline{n} = \underline{f} & \text{em } \partial B_f^t \end{cases} \quad (\text{II.36b})$$

Em suma poderemos descrever o PPV FEIJÃO e TAROCO (7)

por:

"um corpo B está em equilíbrio no instante t se":

(i)

$$\int_{B^t} \underline{T} \cdot D(\underline{\hat{v}}) d\bar{B}^t = 0 \quad \forall \underline{\hat{v}} \in \text{Var } V \cap N(D(\cdot)) \quad (\text{II.37a})$$

onde:

$N(D(\cdot))$: espaço nulo do operador $(\text{Grad.})^{\text{sim}}$;

$\text{Var } V \cap N(D)$: espaço vetorial das ações de movimento virtuais rígidas.

(ii)

$$\int_{B^t} \underline{T} \cdot (\nabla \underline{\hat{v}})^s d\bar{B}^t = \int_{B^t} \underline{b} \cdot \underline{\hat{v}} d\bar{B}^t + \int_{\partial B_f^t} \underline{f} \cdot \underline{\hat{v}} d\bar{B}^t \quad \forall \underline{\hat{v}} \in \text{Var } V \quad (\text{II.37a})$$

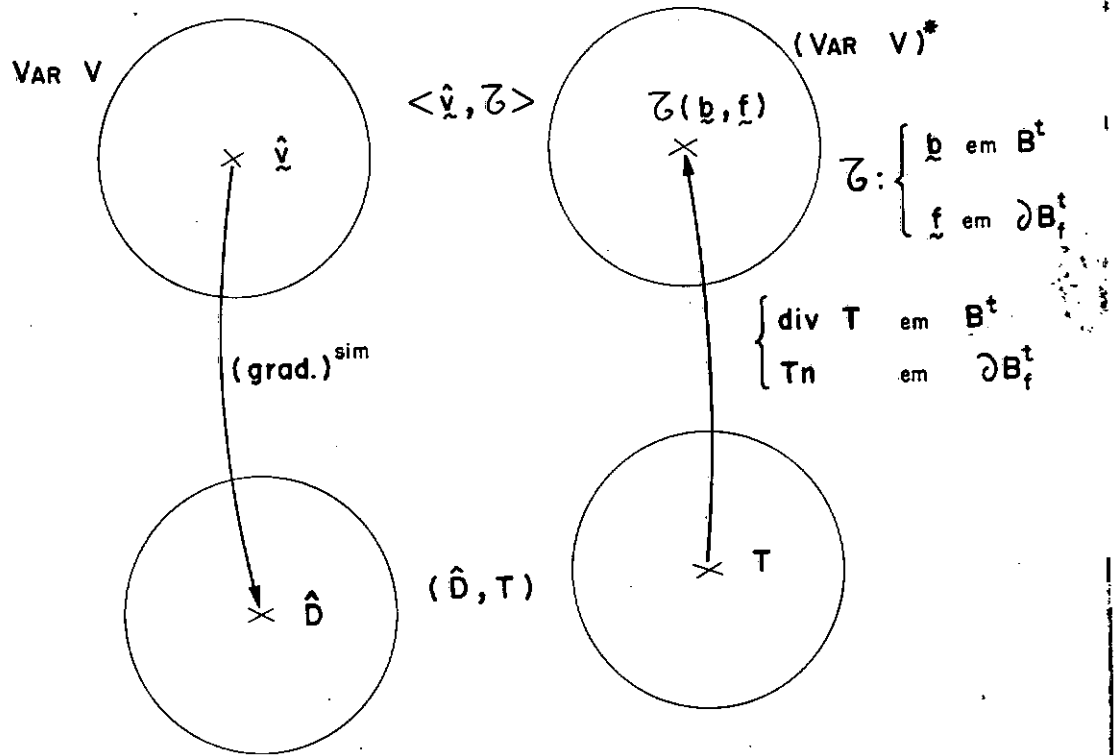
Ao operador $D^*(\cdot)$:

$$D^*(T) : \begin{cases} \text{div } \underline{T} & \text{em } \overset{\circ}{B}^t \\ \underline{T} \underline{n} & \text{em } \partial B_f^t ; \underline{n} \text{ normal exterior a } \partial B^t. \end{cases}$$

denominamos operador adjunto ao operador $D(\cdot)$.

Para os casos de deslocamentos e deformações infinitesimais pode-se confundir campos de velocidades com os campos de deslocamentos. Neste caso o P.P.V. passa a ser denominado P.T.V.:

"um corpo B está em equilíbrio no instante t", se:



$$\langle \hat{v}, z \rangle = \int_{B^t} \underline{b} \cdot \hat{v} \, dB^t + \int_{\partial B_f^t} \underline{f} \cdot \hat{v} \, d\partial B_f^t$$

$$(\hat{D}, T) = \int_{B^t} T \cdot \hat{D} \, dB^t$$

Figura II.4 - PROBLEMA DO EQUILÍBRIO (segundo PPV)

(i)

$$\int_{B^t} T \cdot (\nabla \hat{u})^s dB^t = 0 \quad \forall \hat{u} \in \text{Var } U \cap N((\text{Grad}(\cdot))^{\text{sim}}) \quad (\text{II.38a})$$

Var U : esp. vetorial de desloc. virtuais

(ii)

$$\int_{B^t} T \cdot (\nabla \hat{u})^s dB^t = \int_{B^t} \underline{b} \cdot \hat{u} \, dB^t + \int_{\partial B^t} \underline{f} \cdot \hat{u} \, d\partial B^t \quad \forall \hat{u} \in \text{Var } U \quad (\text{II.38b})$$

No desenvolvimento da teoria de cascas seguiremos este mesmo enfoque. Para cascas entretanto através de hipóteses geo

métricas e cinemáticas, sobre o processo de deformação, resulta-se uma teoria bi-dimensional.

Básicamente consiste esta teoria em descrever o comportamento da casca como sólido tri-dimensional através de campos vetoriais e tensoriais definidos sobre uma superfície de referência. Por uma escolha conveniente dos campos de movimentos virtuais e da descrição da deformação, ante hipóteses cinemáticas, formula-se completamente a teoria utilizada. Este será o desenvolvimento do capítulo subsequente.

CAPÍTULO III

CASCAS - TEORIA DE KIRCHHOFF-LOVE

III.1. CASCAS. DEFINIÇÕES BÁSICAS

Definimos casca (Σ) como um sólido tridimensional caracterizando-se por possuir uma das dimensões muito menor que as demais.

Seja (Σ_{ref}) uma superfície de referência ao longo da casca. Definindo-se nesta superfície segmentos normais a cada ponto, a união destes poderá nos constituir a casca.

Tomaremos a superfície média (Σ_m) como referência e a suporemos suficientemente regular de forma a podermos definir sobre esta vetores tangentes e raios de curvatura (R_α) contínuos.

Seja v , espaço vetorial associado ao espaço euclidiano tridimensional: Definimos:

Def III.1

$$h : \Sigma_m \rightarrow \mathbb{R}$$

$h(X_0)$ sendo a espessura da casca em $X_0 \in \Sigma_m$.

Def III.2

$$d(X, \Sigma_m) : \mathbb{R}^3 \times \Sigma_m \rightarrow \mathbb{R}$$

$d(X, \Sigma_m)$ definida pela distância de $X \in \mathbb{R}^3$ à superfície média (Σ_m) .

Def III.3

$$\pi(X_0) : v \rightarrow PT(X_0) ; X_0 \in \Sigma_m$$

$\pi(X_0)$: operador projeção ortogonal de v sobre o plano tangente $(PT(X_0))$ em $X_0 \in \Sigma_m$.

Def III.4

$$(n \otimes n)(X_0) : v \rightarrow PT(X_0)^\perp$$

$n \otimes n^{(*)}$: operador projeção de v sobre o complemento ortogonal do plano tangente à superfície média (Σ_m) no ponto $X_0 \in \Sigma_m$.

Supondo

$$h(X_0)/2 < \min(R_1, R_2) , \quad \forall X_0 \in \Sigma_m.$$

onde (R_1, R_2) são os raios de curvatura principais da superfície média no ponto $X_0 \in \Sigma_m$.

(*) $(n \otimes n)$ representado pelo produto tensorial sendo $\underline{n}(X_0)$ o vetor normal à Σ_m no ponto X_0 .

Poderemos definir os mapas:

Def III.5

$$\chi : \Sigma \rightarrow \Sigma_m \times \mathbb{R}$$

$$\chi(X) = (X_0, \xi)$$

sendo:

$$\{X_0\} = \{\bar{X}_0 \in \Sigma_m \mid d(X, \bar{X}_0) = \min (d(X, \Sigma_m))\}$$

$$\xi = \min (d(X, \Sigma_m)) = d(X, X_0)$$

Def III.6

$$\chi^{-1} : \Sigma_m \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$$

$$\chi^{-1} (X_0, \xi) = X$$

$$X_0 \in \Sigma_m$$

$$\xi \in [-h(X_0)/2 ; h(X_0)/2]$$

A casca pode, dentro destas hipóteses, ser representada pelo conjunto:

$$\Sigma = \{(X_0, \xi) \mid X_0 \in \Sigma_m ; \xi \in [-h(X_0)/2 ; h(X_0)/2]\} \quad (\text{III.1})$$

ou análogamente:

$\forall X \in \Sigma$; $\underline{X} = \underline{X}_0 + \xi \underline{n}(\underline{X}_0)$; $\underline{n}(\underline{X}_0)$: normal à superfície média
no ponto $\underline{X}_0 \in \Sigma_m$

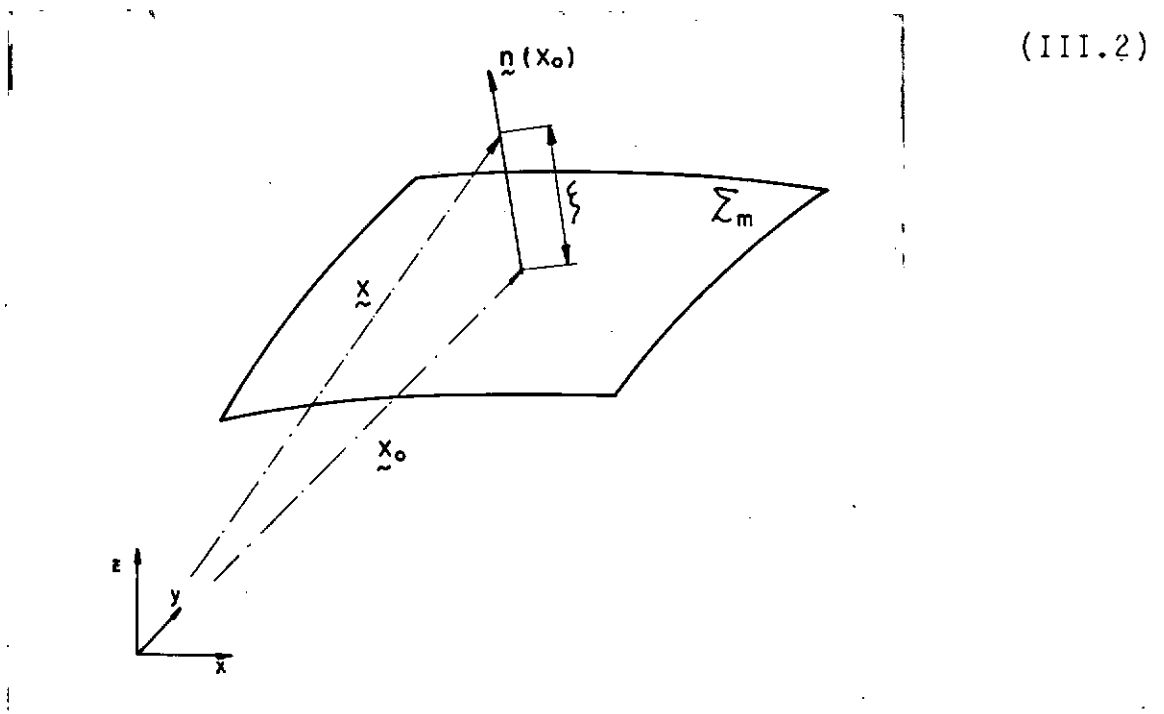


Figura III.1 - Representação dos pontos da casca

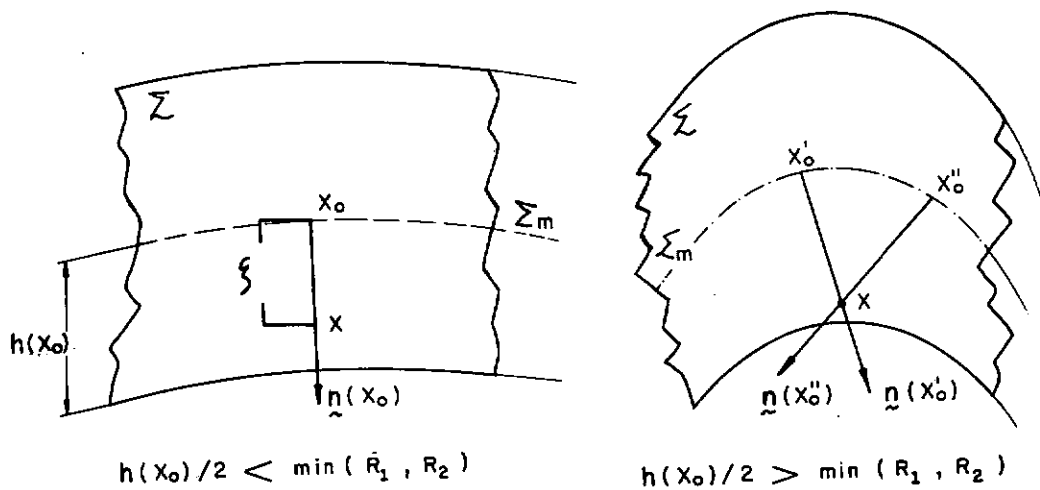


Figura III.2 - Superfície média e unicidade de projeções
do espaço de cascas

Objetiva-se fundamentalmente, através destas definições,

analisar o processo de deformação da casca utilizando-se um modelo mais simples que é o de referir a deformação a parâmetros geométricos da superfície média. Para se atingir este objetivo desenvolveremos as seguintes etapas:

- Decomposição aditiva de campos vetoriais e tensoriais.
- Hipóteses cinemáticas de Kirchhoff-Love.
- Formulação do problema de Kirchhoff-Love.
- Hipóteses constitutivas.

III.2. DESCRIÇÃO DE CAMPOS VETORIAIS E TENSORIAIS EM TERMOS DAS COORDENADAS DA SUPERFÍCIE MÉDIA E DISTÂNCIA AO LONGO DE SUA NORMAL. DECOMPOSIÇÃO ADITIVA

Os operadores (π) e $(n \otimes n)$, definidos na seção anterior, satisfazem:

$$I = \pi(X_0) + (n \otimes n)(X_0) \quad ; \quad \forall X_0 \in \Sigma_m \quad (III.3)$$

onde:

$I : v \rightarrow v$; operador identidade.

Usando-se esta propriedade, poderemos definir as decomposições aditivas para vetores e tensores:

III.2.1. DECOMPOSIÇÃO ADITIVA DE VETORES

Seja

$$\underline{v}(X) \in v$$

Têm-se:

$$\underline{v}(X) = (\pi + \underline{n} \otimes \underline{n}) \underline{v}(X) = \underline{v}_t(X) + \underline{n} v_n(X) \quad (\text{III.4a})$$

onde:

$$\underline{v}_t = \pi \underline{v}(X) \quad (\text{III.4b})$$

$$v_n = \underline{n} \cdot \underline{v}(X) \quad (\text{III.4c})$$

III.2.2. DECOMPOSIÇÃO ADITIVA DE TENSORES

Seja

$$T(X) \in \text{Lin} : v \rightarrow v$$

Têm-se:

$$T(X) = (\pi + \underline{n} \otimes \underline{n}) T (\pi + \underline{n} \otimes \underline{n})$$

donde obtêm-se:

$$\begin{aligned} T(X) &= \pi T \pi + \pi T \underline{n} \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \pi T^T \underline{n} + (\underline{n} \cdot T \underline{n}) \underline{n} \otimes \underline{n} \\ &= T_t + T_s \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes T_s^* + T_n \underline{n} \otimes \underline{n} \end{aligned} \quad (\text{III.5a})$$

Sendo:

$$T_t = \pi T \pi \quad ; \quad T_s = \pi T \tilde{0} \quad ; \quad T_s^* = \pi T^T \tilde{0} \quad ; \quad T_n = \tilde{0} \cdot T \tilde{0} \quad (III.5b)$$

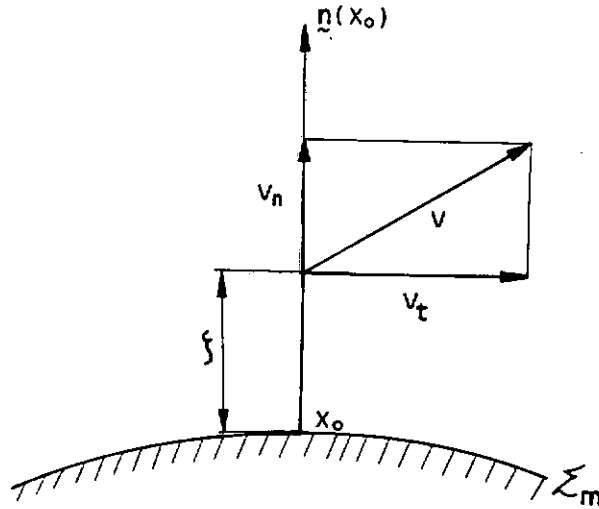


Figura III.3 - Decomposição aditiva de vetores

As componentes tensoriais assim definidas são linearmente independentes. Tomando-se $T, E \in \text{Lin}(v, v)$ (Lin : espaço vetorial das aplicações lineares de v em v) têm-se conseqüentemente:

$$T \cdot E = T_t \cdot E_t + T_s \cdot E_s + T_s^* \cdot E_s^* + T_n E_n \quad (III.6)$$

Se $T \in \text{Sim}$ (espaço vetorial dos tensores simétricos) segue-se:

$$T_s = T_s^*$$

e portanto:

$$T \cdot E = T_t \cdot E_t + 2 T_s \cdot E_s + T_n E_n \quad (III.7)$$

III.2.3. DIFERENCIAIS E GRADIENTES

No cálculo de diferenciais e gradientes as seguintes etapas são desenvolvidas:

- campos associados à casca são representados através de suas coordenadas locais (X_0, ξ) utilizando-se a aplicação $(\chi : \Sigma \rightarrow \Sigma_m \times \mathbb{R})$ [Def. III.5];
- obtêm-se as diferenciais através da regra da cadeia;
- efetua-se a decomposição aditiva dos campos resultantes.

Denotaremos:

- (grad.) e (Grad) respectivamente os operadores gradientes espaciais e materiais;
- gradientes superficiais serão representados por $(\nabla \cdot)$

Definimos:

Def. III.7

$$\Lambda(X_0, \xi) = I_d + \xi \nabla \underline{n}(X_0)$$

Sendo:

$I_d = \pi I \pi$; identidade sobre o plano tangente a $X_0 \in \Sigma_m$.

$\xi \in [-h(X_0)/2 ; h(X_0)/2]$

∇n : Gradiente superficial da normal a Σ_m

Propriedades importantes:

(i)

$$\Lambda(X_0, \xi) = \Lambda^T(X_0, \xi) \quad (\text{III.8})$$

(ii)

$$\exists \Lambda^{-1}(X_0, \xi) \text{ para } \xi \in \{R_\alpha, R_\beta\} ; R_\alpha, R_\beta \text{ raios de curvatura} \\ \text{principais de } \Sigma_m \text{ em } X_0 \quad (\text{III.9})$$

(iii)

$$\nabla \underline{n}(X_0) \Lambda^{-1}(X_0, \xi) = \Lambda^{-1}(X_0, \xi) \nabla \underline{n}(X_0) \text{ para} \\ \xi \in [-h(X_0)/2, h(X_0)/2] \quad (\text{III.10})$$

(iv)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\Lambda^{-1}) = -\Lambda^{-2} \nabla \underline{n} = -\nabla \underline{n} \Lambda^{-2} \text{ (estando implícitos os argumen-} \\ \text{tos } (X_0, \xi)) \quad (\text{III.11})$$

Demonstrações:

As propriedades (i) e (ii) são facilmente demonstradas usando-se as representações componenciais de $\nabla \underline{n}(X_0)$. [Vide Capítulo IV]. A propriedade (ii) é consequência imediata de:

$$\det \Lambda(X_0, \xi) = \left(1 - \frac{\xi}{R_\alpha}\right) \left(1 - \frac{\xi}{R_\beta}\right) \neq 0$$

R_α, R_β representando os raios de curvatura principais da super-

fície média em $X_0 \in \Sigma_m$.

Prop (iii): têm-se:

$$\Lambda^{-1} \Lambda = \Lambda \Lambda^{-1} = I_d$$

$$\Lambda = I_d + \xi \nabla \eta$$

sendo suposto:

$$h(X_0)/2 \ll \min (R_\alpha, R_\beta)$$

Segue-se:

$$\Lambda^{-1} (I_d + \xi \nabla \eta) = (I_d + \xi \nabla \eta) \Lambda^{-1}$$

portanto:

$$\xi \Lambda^{-1} \nabla \eta = \xi \nabla \eta \Lambda^{-1}$$

para $\xi \neq 0$ têm-se:

$$\Lambda^{-1} \nabla \eta = \nabla \eta \Lambda^{-1}$$

para $\xi = 0$ $\Lambda = I_d = \Lambda^{-1}$ logo

$$\Lambda^{-1} \nabla \eta = \nabla \eta = \nabla \eta \Lambda^{-1}$$

conseqüentemente

$$\Lambda^{-1} \nabla_{\underline{\eta}} = \nabla_{\underline{\eta}} \Lambda^{-1} \quad \xi \in [-h(X_0)/2, h(X_0)/2]$$



Prop (iv): como:

$$\Lambda^{-1} \Lambda = \Lambda \Lambda^{-1} = I_d \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \Lambda = \nabla_{\underline{\eta}}$$

derivando-se a primeira igualdade em relação a ξ , obtêm-se:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Lambda^{-1} \right) \Lambda = - \Lambda^{-1} \nabla_{\underline{\eta}} = - \nabla_{\underline{\eta}} \Lambda^{-1}$$

portanto

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Lambda^{-1} = - \nabla_{\underline{\eta}} \Lambda^{-1}$$

de maneira análoga:

$$\Lambda \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Lambda^{-1} \right) = - \nabla_{\underline{\eta}} \Lambda^{-1} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \Lambda^{-1} = - \Lambda^{-2} \nabla_{\underline{\eta}}$$



Relações diferenciais poderão ser obtidas usando-se:

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + \xi \underline{\eta}(X_0)$$

portanto:

$$d\underline{X} = d\underline{X}_0 + \xi \nabla_{\underline{\eta}}(X_0) d\underline{X}_0 + d\xi \underline{\eta}(X_0) = \Lambda(X_0, \xi) d\underline{X}_0 + d\xi \underline{\eta}(X_0)$$

Segue-se evidentemente:

$$d\underline{X}_0 = \Lambda^{-1}(X_0, \xi) \pi d\underline{X} \quad (\text{III.12a})$$

$$d\xi = d\tilde{X} \cdot \tilde{n}(X_0) \quad (\text{III.12b})$$

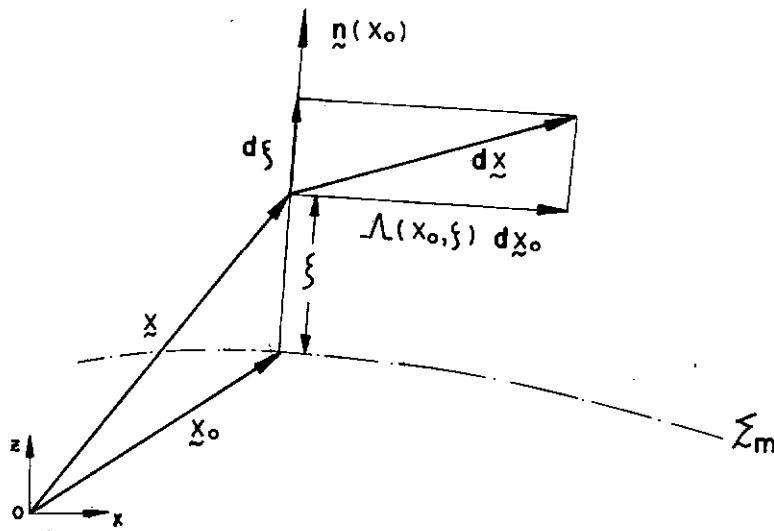


Figura III.4 - Diferencial

Gradientes de campos vetoriais definidos em (Σ) poderão ser calculados aplicando-se o teorema:

Teorema III.1

Sejam: $\tilde{v}(X) \in v$; campo vetorial definido em $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

$$\underline{v}(X_0, \xi) = \tilde{v}(X) \circ \chi(X_0, \xi) = \tilde{v}(\chi(X_0, \xi))$$

então:

$$\begin{aligned} \text{grad } \underline{v}(X) = & \pi[\nabla \underline{v}_t + v_n \nabla \underline{n}] \Lambda^{-1} \pi + \left[\pi \frac{\partial \underline{v}_t}{\partial \xi} \right] \otimes \underline{n} + \\ & + \underline{n} \otimes \pi \Lambda^{-1} \left[\nabla v_n - \nabla \underline{n} \underline{v}_t \right] + \left[\frac{\partial v_n}{\partial \xi} \right] (\underline{n} \otimes \underline{n}) \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

sendo v_n e \underline{v}_t as componentes da decomposição aditiva de $\underline{v}(X_0, \xi)$

e estando implícitos os argumentos (X_0, ξ) .

Demonstração:

Seja

$$\bar{v}(X) \in v ; X \in \Sigma$$

$$d\bar{v} = \text{grad } \bar{v} dX = \nabla \bar{v}(X_0, \xi) dX_0 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}(X_0, \xi) d\xi \quad (i)$$

Decompondo-se aditivamente $\bar{v}(X_0, \xi)$ (III.4) têm-se:

$$\nabla \bar{v}(X_0, \xi) = \nabla \bar{v}_t + \underline{n} \otimes \nabla v_n + v_n \nabla \underline{n} \quad (ii)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \bar{v}(X_0, \xi) = \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \xi} + \frac{\partial v_n}{\partial \xi} \underline{n} \quad (iii)$$

Substituindo-se (ii) e (iii) em (i) e usando os diferenciais (III.12a-b), teremos:

$$\begin{aligned} \text{grad } \bar{v} dX &= [(\nabla \bar{v}_t + \underline{n} \otimes \nabla v_n + v_n \nabla \underline{n}) \Lambda^{-1} \pi + \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \xi} \otimes \underline{n} + \\ &+ \frac{\partial v_n}{\partial \xi} (\underline{n} \otimes \underline{n})] dX ; \quad \forall X \in v \end{aligned}$$

Portanto:

$$\text{grad } \bar{v} = [(\nabla \bar{v}_t + \underline{n} \otimes \nabla v_n + v_n \nabla \underline{n}) \Lambda^{-1} \pi + \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \xi} \otimes \underline{n} + \frac{\partial v_n}{\partial \xi} (\underline{n} \otimes \underline{n})] \quad (iv)$$

Decompondo-se aditivamente (iv) e utilizando-se os lemas:

Lema 3.1

$$\nabla \underline{n} \cdot \underline{n} = 0 \quad ; \quad \forall d\underline{X}_0 \in \{\text{Espaço vetorial tangente a } \Sigma_m \text{ no ponto } \underline{X}_0 \in \Sigma_m\}$$



Dem.: Decorrente da relação:

$$d\underline{n} \cdot \underline{n} = 0$$

**Lema 3.2**

$$(\pi \Lambda^{-1} \nabla \underline{n}) \cdot \underline{n} = 0$$

Dem.: Seja $d\underline{X} \in v$

$$d\underline{X}_0 = \Lambda^{-1} \pi d\underline{X}$$

do Lema 3.1 segue-se:

$$\nabla \underline{n} \cdot \Lambda^{-1} \pi d\underline{X} \cdot \underline{n} = 0$$

Portanto:

$$(\nabla \underline{n} \cdot \Lambda^{-1} \pi)^T \underline{n} \cdot d\underline{X} = (\pi \Lambda^{-1} \nabla \underline{n}) \cdot \underline{n} \cdot d\underline{X} = 0$$

Sendo usada a propriedade (iii) da (Def. III.7).

Segue-se:

$$(\forall d\underline{X} \in v) ((\pi \Lambda^{-1} \nabla \underline{n}) \cdot \underline{n} \cdot d\underline{X}) = 0$$

logo:

$$[\pi \Lambda^{-1} \nabla \underline{n}] \underline{n} = 0$$



Lema 3.3

$$\pi \Lambda^{-1} [\nabla \underline{v}_t]^T \underline{n} = \pi \Lambda^{-1} [\nabla \underline{n}] \underline{v}_t$$

Dem.: Decorre da diferencial:

$$d\underline{v}_t \cdot \underline{n} + \underline{v}_t \cdot d\underline{n} = 0$$

ou seja:

$$(\nabla \underline{v}_t^T \underline{n} + \nabla \underline{n} \underline{v}_t) \cdot d\underline{x}_0 = 0$$

onde

$$d\underline{x}_0 = \Lambda^{-1} \pi d\underline{x} \quad ; \quad d\underline{x} \in \nu \text{ (arbitrário)}$$

sendo usado:

$$(\nabla \underline{n})^T = \nabla \underline{n}$$

Portanto:

$$[\pi \Lambda^{-1} (\nabla \underline{v}_t)^T \underline{n} + \pi \Lambda^{-1} (\nabla \underline{n}) \underline{v}_t] \cdot d\underline{x} = 0 \quad ; \quad \forall d\underline{x} \in \nu$$



Conclue-se finalmente:

$$\begin{aligned} \text{grad } \underline{\bar{v}} = & \pi [\nabla \underline{v}_t + \underline{v}_n \nabla \underline{n}] \Lambda^{-1} \pi + \left[\pi \frac{\partial \underline{v}_t}{\partial \xi} \right] \otimes \underline{n} + \\ & + \underline{n} \otimes \pi \Lambda^{-1} [\nabla \underline{v}_n - (\nabla \underline{n}) \underline{v}_t] + \left[\frac{\partial \underline{v}_n}{\partial \xi} \right] (\underline{n} \otimes \underline{n}) \end{aligned}$$



Representando-se por $\bar{v}(X)$ um campo vetorial material, a relação para $\text{Grad } \bar{v}(X)$ decorre análogamente sendo substituídas as componentes \underline{v}_t e \underline{v}_n espaciais pelas respectivas componentes materiais.

Recordando que o produto:

$$T \cdot (\text{grad}(\bar{v}(X)))^{\text{sim}} = T \cdot (\text{grad}(\bar{v}(X))) ;$$

para:

- $T \in \text{sim}$; tensor de Cauchy

- $\bar{v}(X)$: campo vetorial espacial de ações de movimentos

define a densidade de potência interna, temos:

$$\begin{aligned} T \cdot \text{grad } \underline{\bar{v}} = & T_t \cdot \pi [\nabla \underline{v}_t + \underline{v}_n \nabla \underline{n}] \Lambda^{-1} \pi + T_s \cdot \left[\frac{\partial \underline{v}_t}{\partial \xi} + \right. \\ & \left. + \Lambda^{-1} (\nabla \underline{v}_n - \nabla \underline{n} \underline{v}_t) \right] + T_n \frac{\partial \underline{v}_n}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (\text{III.14a})$$

Denominamos:

$$T_t \cdot \pi [\nabla \underline{v}_t + \underline{v}_n \nabla \underline{n}] \Lambda^{-1} \pi : \text{densidade de potência das tensões planas}$$

(III.14b)

$$T_s \cdot \left[\frac{\partial \underline{v}_t}{\partial \xi} + \Lambda^{-1} (\nabla \underline{v}_n - \nabla \underline{n} \underline{v}_t) \right] : \text{densidade de potência cisalhante} \quad (\text{III.14c})$$

$$T_n \frac{\partial v_n}{\partial \xi} : \text{densidade de potência normal} \quad (\text{III.14d})$$

Aplicando-se as propriedades do produto escalar tensorial GURTIN (6) obtêm-se:

$$\begin{aligned} T \cdot \text{grad } \underline{\tilde{v}} &= T_t \Lambda^{-1} \cdot [\nabla \underline{v}_t + v_n \nabla \underline{n}] + T_s \cdot \left[\frac{\partial \underline{v}_t}{\partial \xi} \right] + \\ &+ \Lambda^{-1} T_s \cdot [\nabla v_n - \nabla \underline{n} \underline{v}_t] + T_n \left[\frac{\partial v_n}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

expressão esta que nos será útil na definição das tensões e taxas de deformações generalizadas para o problema de Kirchhoff-Love.

Denotando-se por $\underline{\tilde{u}}(X)$ os campos vetoriais de deslocamentos infinitesimais; a densidade de trabalho interno \tilde{e} analogamente fornecida por:

$$\begin{aligned} T \cdot \text{Grad } \underline{\tilde{u}} &= T_t \Lambda^{-1} \cdot [\nabla \underline{u}_t + u_n \nabla \underline{n}] + T_s \cdot \left[\frac{\partial \underline{u}_t}{\partial \xi} \right] + \\ &+ \Lambda^{-1} T_s \cdot [\nabla u_n - \nabla \underline{n} \underline{u}_t] + T_n \left[\frac{\partial u_n}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

III.3. HIPÓTESES CINEMÁTICAS DE KIRCHHOFF-LOVE

III.3.1. GENERALIDADES

São introduzidas nesta seção as hipóteses cinemáticas de Kirchhoff-Love. Verifica-se que estas quando aplicadas à cascas finas aproximam com relativa precisão o comportamento real da casca. Entende-se por cascas finas, como definido por diversos autores KRAUS (9), WASHIZU (10), a relação:

$$\left| \frac{h(X_0)}{R_\alpha} \right| \ll 1 ; \quad \forall X_0 \in \Sigma_m$$

R_α : raios de curvatura principais de Σ_m no ponto X_0 ($\alpha = 1, 2$)

quantitativamente muitos autores KRAUS (9) tomam a razão (1/10) como limítrofe entre cascas finas e espessas.

Suporemos no decorrer do trabalho estarmos modelando cascas finas e portanto poderemos descrever a deformação da casca através de campos de K-L.

III.3.2. HIPÓTESES DE KIRCHHOFF-LOVE. CARACTERIZAÇÃO DOS CAMPOS DE KIRCHHOFF-LOVE

Dizemos que uma casca se deforma segundo a teoria de Kirchhoff-Love (doravante denotaremos por TKL) se esta deformação se processa tal que segmentos normais à superfície média permanecem normais e não sofrem alongamentos.

Seguindo o desenvolvimento de WASHIZU (10) não desprezaremos, como freqüente no desenvolvimento da TKL, a relação $|h(X_0)/R_\alpha|$ ante a unidade.

Considerando-se os segmentos normais à superfície média ($L(X_0)$) (com comprimentos definidos pela espessura da casca em $X_0 \in \Sigma_m$), têm-se que estes, ante a hipótese de Kirchhoff-Love, são submetidos à deformações rígidas. Suas rotações associadas sendo descritas através do giro das normais, à superfície média, no decorrer do processo de deformação da casca.

Sejam estes segmentos normais considerados como corpos materiais uni-dimensionais e suponha que o processo de deformação destes segmentos possa ser descrito através de deformações infinitesimais.

Considere o segmento normal $L(X_0)$ definido por:

$$L(X_0) = \{X \in \Sigma \mid \underline{X} = \underline{X}_0 + \xi \underline{n}(X_0) ; \xi \in [-h(X_0)/2, h(X_0)/2] \\ X_0 \in \Sigma_m\}$$

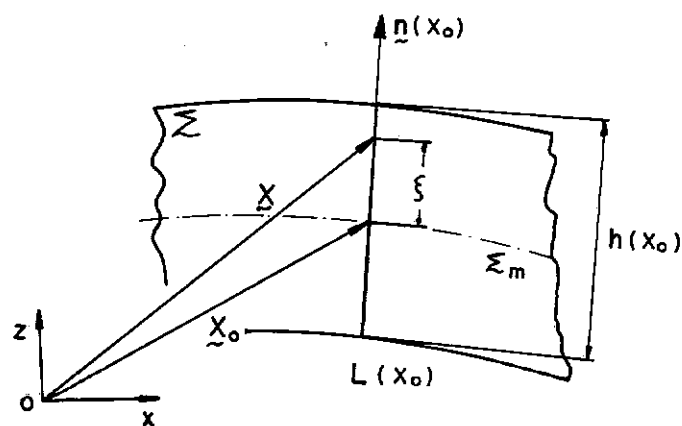


Figura III.5 - Segmentos normais à superfície média (L)

Campos de ações de movimentos. rígidos dos segmentos $L(X_0)$ podem ser representados, seguindo os resultados do Capítulo II, por:

$$\underline{v}(X) = \underline{v}_{ot}(X_0) + \underline{v}_n(X_0) \underline{n}(X_0) + W(X_0) \underline{\xi} \underline{n}(X_0) \quad (\text{III.16a})$$

$$W(X_0) \in \text{Asim}$$

$$X, X_0 \in L(X_0)$$

Sendo considerado implícito o parâmetro tempo (t) e $\underline{v}(X)$ sendo definido em $L(X_0)$ no instante t .

Denominando-se $\underline{w}(X_0)$ ao vetor axial de $W(X_0)$ teremos por definição:

$$\underline{w}(X_0) \wedge \underline{v} = W(X_0) \underline{v} ; \quad \forall \underline{v} \in v$$

(\wedge) produto vetorial em v

análogamente:

$$\underline{v}(X) = \underline{v}_{ot}(X_0) + \underline{v}_n(X_0) \underline{n}(X_0) + \underline{\xi} (\underline{w}(X_0) \wedge \underline{n}(X_0)) ; X, X_0 \in L(X_0) \quad (\text{III.16b})$$

O vetor $\pi \underline{w}(X_0)$ define evidentemente a velocidade angular da normal $\underline{n}(X_0)$ no instante considerado t .

Ao campo vetorial:

$$\underline{\theta}(X_0) = \underline{w}(X_0) \wedge \underline{n}(X_0) ; \quad |\underline{\theta}(X_0)| = |\pi \underline{w}(X_0)| \quad (\text{III.17})$$

denominamos de taxa de rotação da normal. Esta sendo determina

da através da deformação da superfície média (Σ_m) por:

$$\underline{\theta}(X_0) = (\nabla \underline{n} \cdot \underline{v}_{ot} - \nabla v_n) \quad (\text{III.18})$$

(vide interpretação geométrica dos campos de KL ao final da seção).

Motivados pelos resultados (III.16 - III.18) introduz-se o conceito de campo vetorial de KL:

Definição III.8

Definimos campos de ações de movimentos de Kirchhoff-Love, da casca (Σ) no instante \underline{t} , através dos campos que podem ser caracterizados por:

$$\underline{v}(X_0, \xi) = \underline{v}_{ot}(X_0) + v_n(X_0) \underline{n}(X_0) + \xi (\nabla \underline{n} \cdot \underline{v}_{ot}(X_0) - \nabla v_n(X_0))$$

$$\forall (X_0, \xi) \in \Sigma_m \times [-h(X_0)/2, h(X_0)/2]$$

ou análogamente:

$$\underline{v}(X_0, \xi) = \Lambda(X_0, \xi) \underline{v}_{ot}(X_0) - \xi \nabla v_n(X_0) + v_n(X_0) \underline{n}(X_0)$$

Ao espaço vetorial dos campos de ações de movimento de Kirchhoff-Love denotaremos por (V_{KL}) .

O espaço vetorial dos campos de Kirchhoff-Love podem também ser caracterizados através do teorema:

Teorema III.2

Seja:

$$\bar{IV} = \{ \underline{v}(X_0, \xi) \mid P_S(\underline{v}(X_0, \xi)) = 0 ; P_n(\underline{v}(X_0, \xi)) = 0 ;$$

$$\forall (X_0, \xi) \in \Sigma_m \times [-h(X_0)/2, h(X_0)/2] \}$$

onde:

$P_S(\underline{v}(X_0, \xi))$: potência cisalhante do campo vetorial
 $\underline{v}(X_0, \xi)$ (definida em III.14c);

$P_n(\underline{v}(X_0, \xi))$: potência normal de $\underline{v}(X_0, \xi)$ (definida em
 III.14d),

então

$$V_{KL} = IV$$

Demonstração:

$$(I) \quad (V_{KL} \subset IV)$$

Seja

$$\underline{v} \in V_{KL}$$

$$\underline{v}(X_0, \xi) = \underline{v}_{ot}(X_0) + \xi (\nabla \underline{n} \cdot \underline{v}_{ot} - \nabla v_n) + v_n \underline{n}(X_0)$$

de (III.14d) segue-se:

$$P_n(\underline{v}) = T_n \frac{\partial v_n}{\partial \xi}$$

mas

$$v_n = v_n(X_0) ,$$

portanto

$$P_n(\underline{v}) = 0 \quad (i)$$

Seja a potência cisalhante $P_s(\underline{v})$ (III.14c):

$$P_s(\underline{v}) = T_s \cdot \left[\frac{\partial \underline{v}_t}{\partial \xi} + \Lambda^{-1} [\underline{v}_n - \nabla n \underline{v}_t] \right]$$

Para um campo de KL (Def. III.8)

$$\underline{v}_t(X_0, \xi) = \Lambda(X_0, \xi) \underline{v}_{ot}(X_0) - \xi \nabla v_n$$

Portanto:

$$\frac{\partial \underline{v}_t}{\partial \xi} = \nabla n \underline{v}_{ot} - \nabla v_n \quad (ii)$$

e análogamente:

$$\Lambda^{-1} \nabla n \underline{v}_t = \Lambda^{-1} \nabla n (\Lambda \underline{v}_{ot} - \xi \nabla v_n)$$

de (III.10), Λ^{-1} e ∇n comutam-se, logo:

$$\Lambda^{-1} \nabla n \underline{v}_t = \nabla n \underline{v}_{ot} - \xi \Lambda^{-1} \nabla n \nabla v_n \quad (iii)$$

de (ii) e (iii) temos:

$$\left[\frac{\partial \underline{v}_t}{\partial \xi} + \Lambda^{-1} [\nabla v_n - \nabla n \underline{v}_{ot}] \right] = [\Lambda^{-1} [-\Lambda + I_d + \xi \nabla n] \nabla v_n] \equiv 0$$

e finalmente, $P_S(\underline{v}) = 0$.

De (i) e (ii)

Se

$$\underline{v} \in V_{KL} \rightarrow \underline{v} \in N \quad (V_{KL} \subset N)$$

$$(III) \quad (N \subset V_{KL})$$

Seja

$$\underline{v} \in N,$$

isto é:

$$\frac{\partial v_n}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{logo } v_n = v_n(X_0)) \quad (i)$$

e

$$\left[\frac{\partial v_t}{\partial \xi} + \Lambda^{-1} [\nabla v_n - \nabla n \underline{v}_t] \right] = 0 \quad (ii)$$

Usando (III.11) podemos escrever:

$$\frac{\partial v_t}{\partial \xi} + \Lambda^{-1} [\nabla v_n - \nabla n \underline{v}_t] = \Lambda \left[\frac{\partial}{\partial \xi} [\Lambda^{-1} \underline{v}_t] + \Lambda^{-2} \nabla v_n \right] \quad (iii)$$

De (ii) e (iii) segue-se:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\Lambda^{-1} \underline{v}_t) = - \Lambda^{-2} \nabla v_n$$

Tomando-se $(\Lambda^{-1} \underline{v}_t)$ como incôgnita, a equação diferen-

cial admite a solução geral:

$$(\Lambda^{-1} \underline{v}_t) = (\Lambda^{-1} \underline{v}_t)_h + (\Lambda^{-1} \underline{v}_t)_p \quad (\text{iv.a})$$

Os índices h e p denotando respectivamente as soluções homogênea e particular

$$(\Lambda^{-1} \underline{v}_t)_h = - \underline{v}_{ot}(X_0) ; \underline{v}_{ot}(X_0) : \text{campo vetorial tangente a } \Sigma_m \text{ em } X_0 \in \Sigma_m. \quad (\text{iv.b})$$

$$(\Lambda^{-1} \underline{v}_t)_p = \xi \Lambda^{-1} \nabla v_n \quad (\text{iv.c})$$

De (iv.a-c) têm-se:

$$\underline{v}_t(X_0, \xi) = \Lambda(X_0, \xi) \underline{v}_{ot}(X_0) - \nabla v_n(X_0)$$

logo:

Se

$$\underline{v} \in \mathbb{N} \rightarrow \underline{v}(X_0, \xi) = \underline{v}_{ot}(X_0) + \xi (\nabla n \underline{v}_{ot} - \nabla v_n)$$

portando:

$$\underline{v} \in V_{KL} \quad (\mathbb{N} \subset V_{KL})$$

Dos resultados das etapas (I) e (II)), têm-se:

$$\mathbb{N} = V_{KL}$$

As Figuras (III.5-6) fornecem uma representação gráfica para os campos de Kirchhoff-Love.

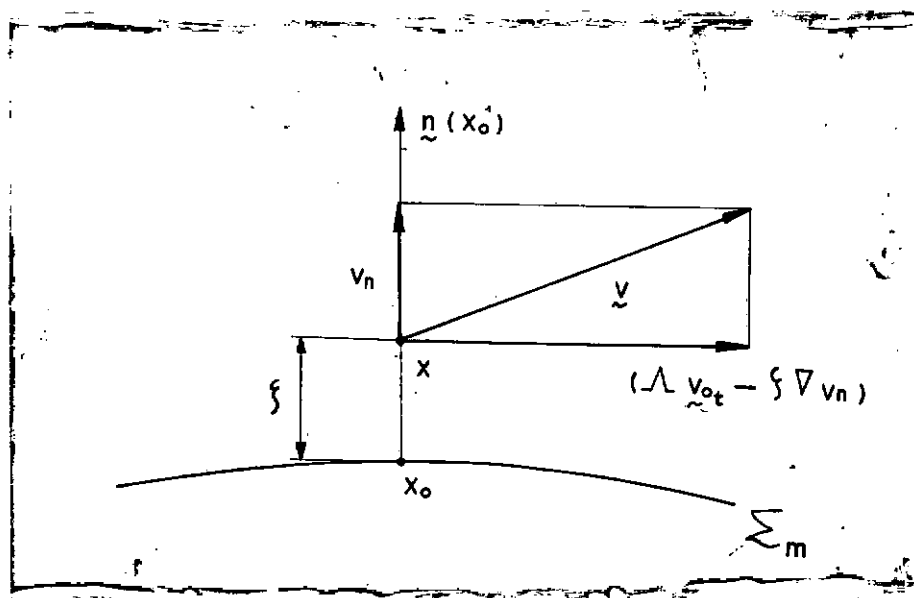


Figura III.5 - Campos de Kirchhoff-Love

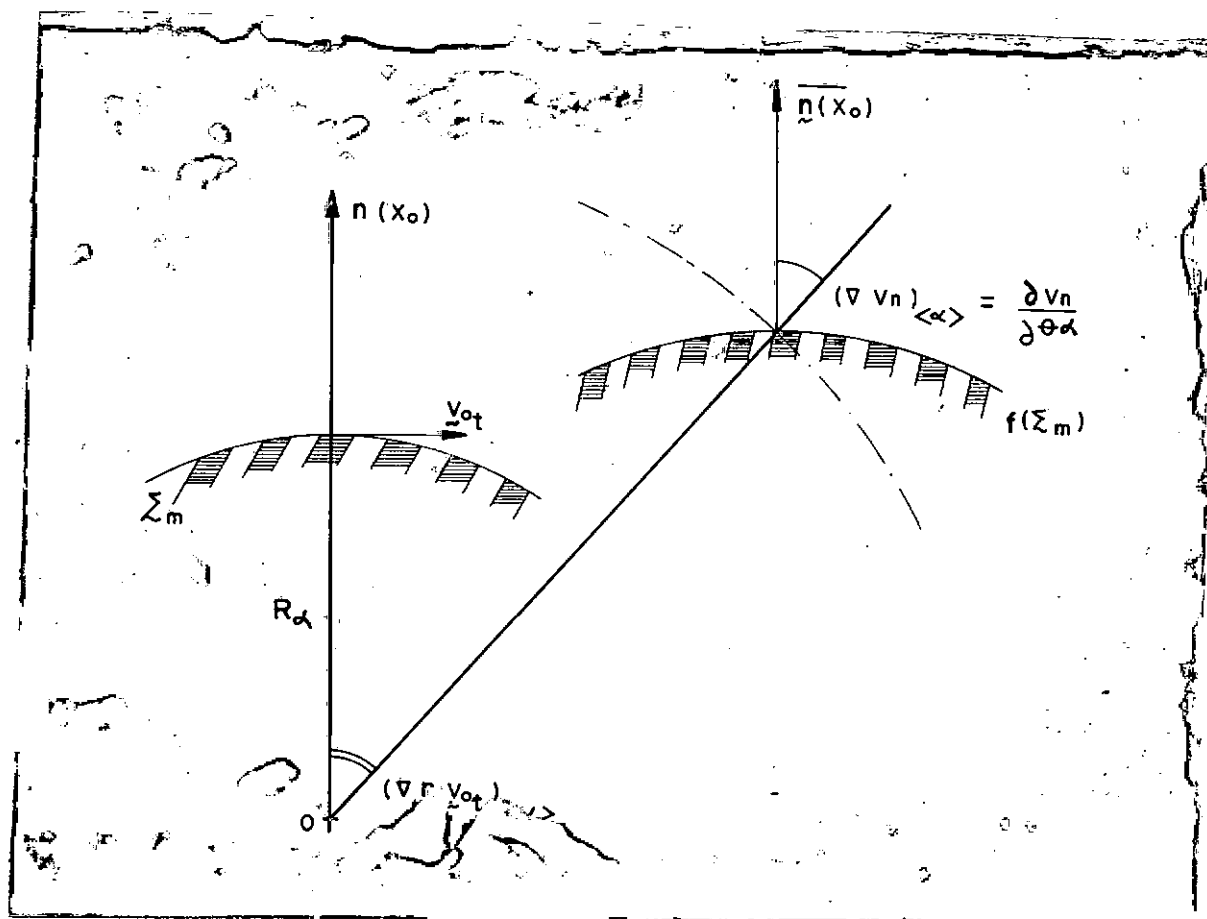


Figura III.6 - Taxa de rotação da normal $\underline{n}(X_0)$

$$\underline{\theta}(X_0) = (\nabla \underline{n} \underline{v}_{ot} - \nabla v_n)$$

Uma demonstração que $\underline{\theta}(X_0) = (\nabla n \underline{v}_{ot} - \nabla v_n)$ pode ser encontrada em WASHIZU (10).

Usando-se de notação componencial e de resultados de geometria diferencial pode-se aprimorar a visualização do vetor $\underline{\theta}(X_0)$.

Demonstra-se que em componentes físicas, parametrizando-se a superfície média através das direções principais de curvatura KRAUS (9), $(\nabla n \underline{v}_{ot})$ e (∇v_n) podem ser expressos respectivamente por (vide Cap. III):

$$-(\nabla n \underline{v}_{ot})_{<\alpha>} = \frac{v_{ot<\alpha>}}{R_\alpha}$$

sendo:

R_α : raio de curvatura principal da Σ_m em $X_0 \in \Sigma_m$
(segundo a direção $\underline{\alpha}$);

$v_{ot<\alpha>}$: componente física da velocidade tangencial
(segundo a direção $\underline{\alpha}$),

$(v_{ot<\alpha>}/R_\alpha)$ definindo portanto a velocidade angular da normal em seu movimento em torno do centro de curvatura da superfície média (Σ_m). (No ponto $X_0 \in \Sigma_m$ e segundo a direção $\underline{\alpha}$)

$-(\nabla v_n)_{<\alpha>} = \frac{\partial v_n}{\partial \alpha}$: rotação da normal devido à deformação transversal da superfície média.

III.3.3. POTÊNCIA INTERNA DE CAMPOS DE KIRCHHOFF-LOVE. DEFORMAÇÕES GENERALIZADAS

Seguindo os resultados (III.14a-d), a potência virtual

interna pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Sigma} \mathbf{T} \cdot \text{Grad } \hat{\mathbf{v}} \, d\Sigma = & \iint_{\Sigma_m} \int_{h(X_0)} \left\{ \mathbf{T}_t \cdot \pi [\nabla \hat{\mathbf{v}}_t + \hat{\mathbf{v}}_n \nabla \hat{\mathbf{n}}] \Lambda^{-1} \pi + \right. \\ & + \mathbf{T}_s \cdot \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}_t}{\partial \xi} + \Lambda^{-1} [\nabla \hat{\mathbf{v}}_n - \nabla \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{v}}_t] \right] + \\ & \left. + \mathbf{T}_n \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}_n}{\partial \xi} \right\} \det \Lambda \, d\xi \, d\Sigma_0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var } V \end{aligned}$$

sendo:

$$d\Sigma = \det \Lambda \, d\xi \, d\Sigma_0 : \text{ elemento de volume.}$$

Supondo que todos os processos de deformação da casca se processam segundo movimentos de Kirchhoff-Love, restringimos os espaços de ações de movimentos possíveis do modelo tridimensional ao espaço vetorial dos campos de Kirchhoff-Love.

Seja $\hat{\mathbf{v}}(X_0, \xi) = \hat{\mathbf{v}}_{ot}(X_0) + \xi (\nabla \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{v}}_{ot} - \nabla \hat{\mathbf{v}}_n) + \hat{\mathbf{v}}_n(X_0) \hat{\mathbf{n}}(X_0)$, um campo de velocidades virtuais de K-L. Seguindo os resultados do Teorema III.2, a potência virtual interna de $\hat{\mathbf{v}}(X_0, \xi)$ reduz-se a:

$$\text{PVI}(\hat{\mathbf{v}}) = \iint_{\Sigma_m} \int_{h(X_0)} \mathbf{T}_t \cdot \pi [\nabla \hat{\mathbf{v}}_t + \hat{\mathbf{v}}_n \nabla \hat{\mathbf{n}}] \Lambda^{-1} \pi \det \Lambda \, d\xi \, d\Sigma_0 \quad (\text{III.19a})$$

ou análogamente, usando-se (III.15):

$$\begin{aligned}
 PVI(\bar{v}) = & \iint_{\Sigma_0} \int_h T_t \Lambda^{-1} \cdot \pi [\nabla(v_{ot} + \xi (\nabla n v_{ot} - \nabla v_n)) + \\
 & + v_n \nabla n] \det \Lambda \, d\xi \, d\Sigma_m
 \end{aligned}
 \tag{III.19b}$$

reagrupando termos obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 PVI(\bar{v}) = & \iint_{\Sigma_0} \left[\int_h T_t \Lambda^{-1} \det \Lambda \, d\xi \right] \cdot \pi [\nabla v_{ot} + v_n \nabla n] \, d\Sigma_m + \\
 & \iint_{\Sigma_0} \left[\int_h \xi T_t \Lambda^{-1} \det \Lambda \, d\xi \right] \cdot \pi [\nabla (\nabla n v_{ot} - \nabla v_n)] \, d\Sigma_m
 \end{aligned}
 \tag{III.20a}$$

Denominamos aos campos definidos em Σ_m :

$$\epsilon(X_0) = \pi [\nabla v_{ot} + v_n \nabla n] : \text{taxa de deformação plana generalizada}
 \tag{III.20b}$$

$$\chi(X_0) = \pi [\nabla (\nabla n v_{ot} - \nabla v_n)] : \text{taxa de mudança de curvatura generalizada}
 \tag{III.20c}$$

$$N(X_0) = \int_{h(X_0)} T_t \Lambda^{-1} \det \Lambda \, d\xi : \text{tensão plana generalizada}
 \tag{III.20d}$$

$$M(X_0) = \int_{h(X_0)} \xi T_t \Lambda^{-1} \det \Lambda \, d\xi : \text{momento generalizado}
 \tag{III.20e}$$

Portanto:

$$PVI(\bar{v}) = \iint_{\Sigma_0} N(X_0) \cdot \epsilon(X_0) + M(X_0) \cdot \chi(X_0) \, d\Sigma_0
 \tag{III.21}$$

A potência interna ante hipóteses de Kirchhoff-Love po-

de; portanto ser definida em termos de campos tensoriais definidos sobre a superfície média. Deste fato acrescido dos resultados das seções anteriores motiva-nos a reformulação do problema de Kirchhoff-Love mas agora em se tratando de um problema bi-dimensional. Este, sendo o enfoque desenvolvido na próxima seção.

III.4. O PROBLEMA DE KIRCHHOFF-LOVE

Campos de Kirchhoff-Love (K-L) são descritos por:

$$\underline{v}(X_0, \xi) = \underline{v}_{ot}(X_0) + \xi (\nabla n \underline{v}_{ot}(X_0) - \nabla v_n(X_0)) + v_n(X_0) \underline{n}(X_0)$$

Ao par $(\underline{v}_{ot}(X_0), v_n(X_0))$ associamos a um único campo de K-L e conversamente a cada campo vetorial $\underline{v}(X_0, \xi)$ de K-L podemos associar um único par $(\underline{v}_{ot}(X_0), v_n(X_0))$.

Podemos portanto caracterizar campos de Kirchhoff-Love através dos pares $(\underline{v}_{ot}(X_0), v_n(X_0))$. Os espaços vetoriais associados aos campos de Kirchhoff-Love poderão de forma análoga serem descritos:

Definimos

Def III.9

$$\tilde{IV}_{KL} : \{(\underline{v}_{ot}(X_0), v_n(X_0)) \mid \underline{v}(X_0, \xi) = \underline{v}_{ot}(X_0) + \xi (\nabla n \underline{v}_{ot}(X_0) - \nabla v_n(X_0)) ;$$

$\underline{v}(X_0, \xi)$ é campo vetorial de K-L de ações de movimento suficientemente regular}

Def III.10

$\text{Kin } \tilde{IV}_{KL} : \{(\underline{v}_{ot}(X_0), v_n(X_0)) \mid \underline{v}(X_0, \xi) \text{ é campo admissível de K-L satisfazendo às condições de contorno prescritas em } \partial \Sigma_m^{\tilde{V}} \text{ (contorno sob ações de movimentos prescritas)}\}$

Def III.11

$\text{Var } \tilde{IV}_{KL} : \{(\underline{\tilde{v}}_{ot}(X_0), \tilde{v}_n(X_0)) \mid \underline{\tilde{v}}(X_0, \xi) \text{ é campo de ações de movimentos virtuais de K-L}\}$

Ao operador:

$$\mathcal{D}(\underline{v}_{ot}, v_n) = (\pi [\nabla v_{ot} + v_n \nabla n], \pi [\nabla(\nabla n v_{ot} - \nabla v_n)]) \quad (\text{III.22})$$

Denominamos operador de taxas de deformações generalizadas. Ao espaço vetorial $R(\mathcal{D}(\tilde{IV}_{KL}))$: denominamos de espaço vetorial das taxas de deformações de Kirchhoff-Love e denotamos por D_{KL} .

$R(\mathcal{D}(\tilde{IV}_{KL})) =$ definindo a imagem do operador \mathcal{D} sobre \tilde{IV}_{KL}

Ao espaço nulo do operador de taxas de deformações generalizadas ($N(\mathcal{D})$) associa-se uma potência virtual interna nula (potência das tensões planas nula). A conversa segundo KRAUS (9) é também verificada:

"A todo movimento virtual-rígido de K-L associa-se a uma deformação generalizada nula".

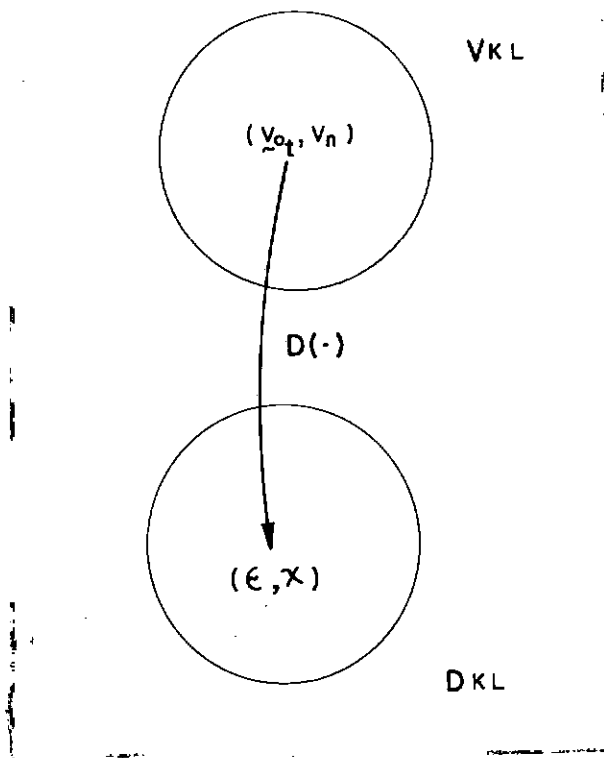


Figura III.7 - Operador de deformações

Temos em suma:

$$\begin{aligned}
 N(\mathcal{D}) &= \{(\underline{u}_{0t}, v_n) \mid \mathcal{D}(\underline{u}_{0t}, v_n) = 0 ; \forall X_0 \in \Sigma_m\} = \\
 &= \{(\underline{u}_{0t}, v_n) \mid \underline{u}(X_0, \xi) = \Lambda \underline{u}_{0t} - \nabla v_n + v_n \underline{n} \text{ é movimento de} \\
 &\quad \text{K-L rígido}\}
 \end{aligned}$$

Os enunciados do axioma das potências virtuais e do princípio das potências virtuais podem ser imediatamente extendidos ao problema:

uma casca Σ está em equilíbrio sob ação de esforços externos (ante as hipóteses de K-L) se:

(i) (Axioma das potências virtuais)

$$PVI ((\widehat{v}_{ot}, \widehat{v}_n)) = 0 \quad \forall (\widehat{v}_{ot}, \widehat{v}_n) \in \text{Var } \widetilde{V}_{KL} \cap N(\mathcal{D})$$

(ii) (Princípio das potências virtuais)

$$PVI ((\widehat{v}_{ot}, \widehat{v}_n)) = PVE ((\widehat{v}_{ot}, \widehat{v}_n)) \quad \forall (\widehat{v}_{ot}, \widehat{v}_n) \in \text{Var } \widetilde{V}_{KL}$$

A potência virtual interna (III.21) podendo ser descrita por:

$$PVI = \iint_{\Sigma_m} \{N_t \cdot [\nabla \widehat{v}_{ot} + \widehat{v}_n \nabla n] + M_t \cdot \nabla \underline{\theta}\} d\Sigma_m$$

$$\underline{\theta} = \nabla n \widehat{v}_{ot} - \nabla \widehat{v}_n$$

(III.23)

(N_t, M_t) : duais das taxas de deformações generalizadas e estando relacionadas com as tensões tridimensionais através de (III.20d-e).

Aplicando o teorema da divergência para a potência virtual interna supondo (N_t, M_t) suficientemente regulares teremos:

(i)

$$\iint_{\Sigma_m} N_t \cdot (\nabla \widehat{v}_{ot} + \widehat{v}_n \nabla n) d\Sigma_m = \iint_{\Sigma_m} \nabla n \cdot N_t \widehat{v}_n d\Sigma_m -$$

$$- \iint_{\Sigma_m} \text{div } N_t \cdot \widehat{v}_{ot} d\Sigma_m + \int_{\partial \Sigma_m} N_t \underline{a}_v \cdot \widehat{v}_{ot} d\partial \Sigma_m$$

(III.24a)

(ii)

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma_m} M_t \cdot (\nabla(\nabla n \hat{v}_{ot} - \nabla \hat{v}_n)) d\Sigma_m &= \iint_{\Sigma_m} \operatorname{div} (M_t^T (\nabla n \hat{v}_{ot} - \nabla \hat{v}_n)) d\Sigma_m - \\
 &- \iint_{\Sigma_m} \operatorname{div} M_t \cdot (\nabla n \hat{v}_{ot} - \nabla \hat{v}_n) d\Sigma_m
 \end{aligned}
 \quad (\text{III.24b})$$

(ii.a)

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma_m} \operatorname{div} (M_t^T (\nabla n \hat{v}_{ot} - \nabla \hat{v}_n)) d\Sigma_m &= \int_{\partial \Sigma_m} M_t \underline{a}_v \cdot (\nabla n \hat{v}_{ot} - \nabla \hat{v}_n) d\partial \Sigma_m = \\
 &= \int_{\partial \Sigma_m} (\nabla n M_t \underline{a}_v \cdot \hat{v}_{ot} - M_t \underline{a}_v \cdot \left(-\frac{\partial \hat{v}_n}{\partial v} \underline{a}_v + \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial s} \underline{a}_s \right)) d\partial \Sigma_m = \\
 &= \int_{\partial \Sigma_m} \nabla n M_t \underline{a}_v \cdot \hat{v}_{ot} - M_{t_{vv}} \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial s} (M_{t_{vs}}) \hat{v}_n d\partial \Sigma_m - \\
 &- \sum_i \left[M_{t_{vs}} \hat{v}_n \Big|_{X_0^{i+}} - M_{t_{vs}} \hat{v}_n \Big|_{X_0^{i-}} \right]
 \end{aligned}$$

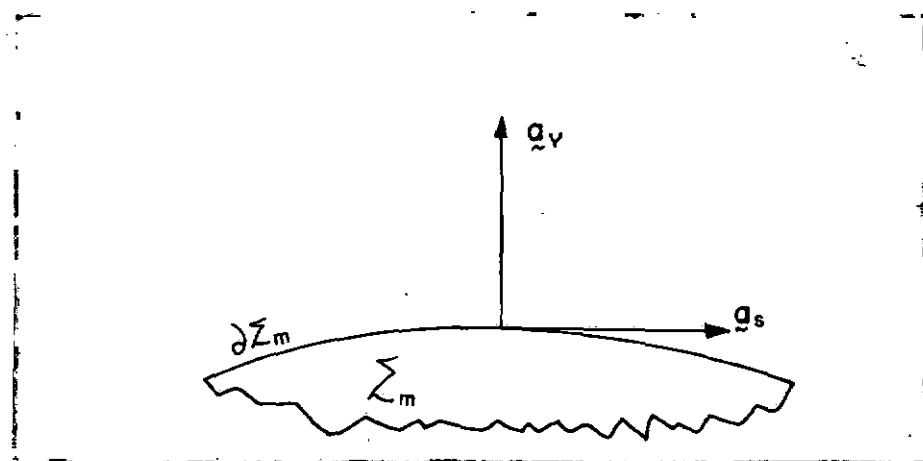


Figura III.8 - Contorno ante o problema de Kirchhoff-Love

sendo:

$$M_{t_{vv}} = M_t \underline{a}_v \cdot \underline{a}_v \quad M_{t_{vs}} = M_t \underline{a}_v \cdot \underline{a}_s$$

X_0^i : pontos de descontinuidade da normal \underline{a}_v em $\partial\Sigma_m$.

(ii.b)

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_m} \operatorname{div} M_t \cdot (\nabla \underline{n} \cdot \underline{v}_{ot} - \nabla \hat{v}_n) d\Sigma_m &= \iint_{\Sigma_m} \nabla \underline{n} \operatorname{div} M_t \cdot \hat{v}_{ot} d\Sigma_m + \\ &+ \iint_{\Sigma_m} \operatorname{div} \operatorname{div} M_t \hat{v}_n - \int_{\partial\Sigma_m} \operatorname{div} M_t \cdot \underline{a}_v \underline{v}_n d\partial\Sigma_m \end{aligned}$$

De (i) e (ii) temos

$$\begin{aligned} \text{PVI}((\hat{v}_{ot}, \hat{v}_n)) &= - \iint_{\Sigma_m} (\operatorname{div} N_t + \nabla \underline{n} \operatorname{div} M_t) \cdot \hat{v}_{ot} d\Sigma_m + \\ &+ \iint_{\Sigma_m} (N_t \cdot \nabla \underline{n} - \operatorname{div} \operatorname{div} M_t) \hat{v}_n d\Sigma_m + \int_{\partial\Sigma_m} (N_t + \\ &+ \nabla \underline{n} M_t) \underline{a}_v \cdot \hat{v}_{ot} d\partial\Sigma_m + \int_{\partial\Sigma_m} \operatorname{div} M_t \cdot \underline{a}_v + \frac{\partial}{\partial s} (M_{t_{vs}}) \hat{v}_n d\partial\Sigma_m - \\ &- \int_{\partial\Sigma_m} M_{t_{vv}} \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial v} d\partial\Sigma_m - \sum_i \left[M_{t_{vs}} \hat{v}_n \Big|_{X_0^{i+}} - M_{t_{vs}} \hat{v}_n \Big|_{X_0^{i-}} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

Do Princípio das Potências Virtuais, para se garantir o equilíbrio da casca, a potência externa deverá ser expressa co

mo:

$$\begin{aligned}
 (- \text{PVE} ((\bar{v}_{ot}, \bar{v}_n))) &= \iint_{\Sigma_m} [\bar{f}_t \cdot \bar{v}_{ot} + f_n \bar{v}_n] d\Sigma_m + \int_{\partial\Sigma_m} \left[\bar{f}_t \cdot \bar{v}_{ot} + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{f}_n \bar{v}_n + \bar{m}_v \frac{\partial \bar{v}_n}{\partial v} \right] d\partial\Sigma_m + \sum_i \bar{f}_n^i \bar{v}_n \Big|_{X_i}
 \end{aligned}
 \tag{III.26}$$

Aplicando o princípio das potências virtuais para todo movimento virtual obtém-se as equações locais:

$$\begin{cases} \text{div } N_t + \nabla n \text{ div } M_t = \bar{f}_t \\ N_t \cdot \nabla n - \text{div div } M_t = f_n \end{cases} \quad \text{em } \Sigma_m^0 \tag{III.27a}$$

$$(N_t + \nabla n M_t) \cdot \underline{a}_v = \bar{f}_t$$

$$\text{div } M_t \cdot \underline{a}_v + \frac{\partial}{\partial s} (M_{t_{vs}}) = \bar{f}_n$$

$$\text{em } \partial\Sigma_m^f$$

$$M_{t_{vv}} = \bar{m}_v$$

$$(M_{t_{vs}} - M_{t_{vs}}|_{X^i}) = \bar{f}_n^i$$

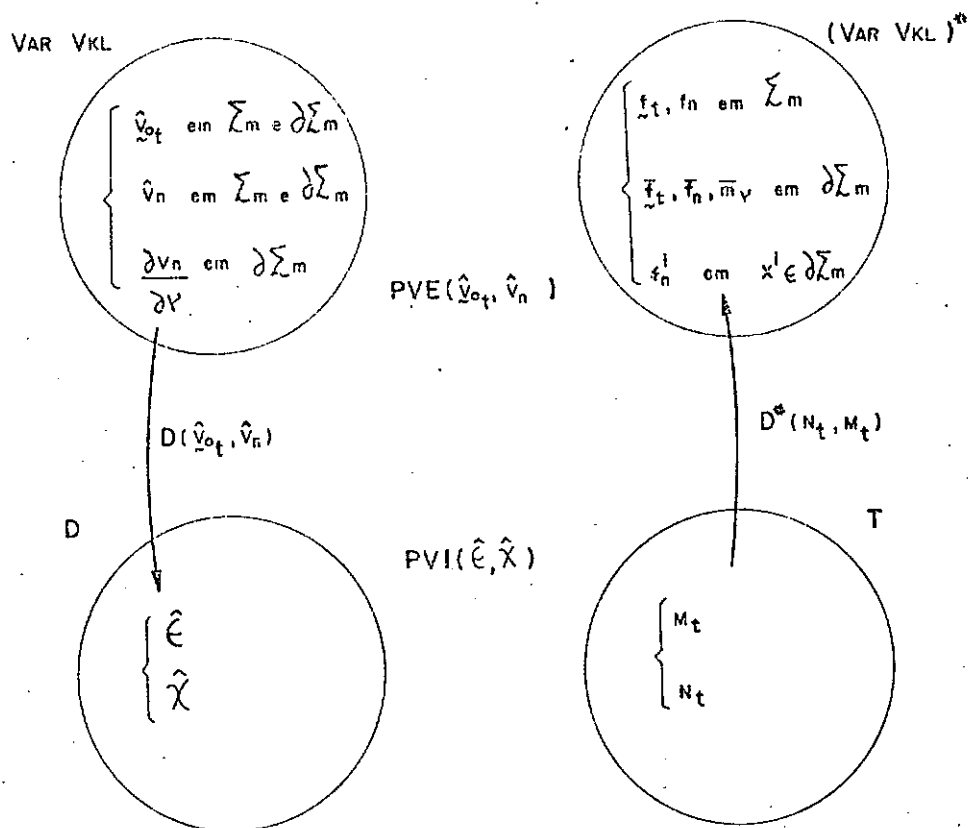
$$\text{em } X = X^i; i = 1, \dots, k$$

[pontos de descontinuidade da normal \underline{a}_v]

$$\tag{III.27b}$$

sendo:

$\partial\Sigma_m^f$: contorno da superfície média sob prescrição de esforços



$$D(v_{ot}, v_n) = (\nabla \bar{v}_{ot} + \bar{v}_n \nabla n ; \nabla(\nabla n \bar{v}_{ot} - \nabla \bar{v}_n))$$

$$D^*(N_t, M_t) = \left. \begin{aligned} \text{div } N_t + \nabla n \text{ div } M_t &= \bar{f}_t \\ N_t \cdot \nabla n - \text{div div } M_t &= \bar{f}_n \end{aligned} \right\} \text{em } \partial \Sigma_m$$

$$(N_t + \nabla n M_t) \underline{a}_v = \bar{f}_t$$

$$\text{div } M_t \cdot \underline{a}_v + \frac{\partial}{\partial s} (M_{tvs}) = \bar{f}_n \quad \text{em } \partial \Sigma_m^f$$

$$M_{tvs} = \bar{m}_v$$

$$M_{tvs} - M_{tvs}|_{\chi^i} = \bar{f}_n^i \quad \text{em } \chi^i$$

$$PVI(\epsilon, \chi) = \iint_{\Sigma_m} (N_t \cdot \epsilon + M_t \cdot \chi) d\Sigma_m$$

$$PVE(\bar{v}_{ot}, \bar{v}_n) = \iint_{\Sigma_m} (\bar{f}_t \cdot \bar{v}_{ot} + \bar{f}_n \bar{v}_n) d\Sigma_m + \int_{\partial \Sigma_m} \left[\bar{f}_t \cdot \bar{v}_{ot} + \bar{f}_n \bar{v}_n + \bar{m}_v \frac{\partial \bar{v}_n}{\partial v} \right] d\partial \Sigma_m + \sum_i \bar{f}_n^i \bar{v}_n|_{\chi^i}$$

Figura III.9 - Problema de Kirchhoff-Love segundo o PPV

Um desenvolvimento análogo pode ser realizado em se tratando do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) sob hipóteses de pequenas deformações e deslocamentos. Analisa-se nestas situações as configurações iniciais e deformadas (supostas idênticas sob pequenas deformações e deslocamentos).

No presente trabalho restringimos a análise aos casos estáticos sendo portanto analisados os deslocamentos infinitesimais em substituição aos campos de ações de movimentos.

Os seguintes espaços nos serão convenientes:

Def III

$$\mathbb{U}_{KL} = \{(\underline{u}_{ot}, u_n) \mid \underline{u}(X_0, \xi) = \underline{u}_{ot}(X_0) + \xi (\nabla n \underline{u}_{ot}(X_0) -$$

$- \nabla u_n(X_0) ; \underline{u}(X_0, \xi) \text{ é o campo vetorial de K-L de deslocamentos infinitesimais suficientemente regular} \}$

Def III

$$\text{Kin } \mathbb{U}_{KL} = \{(\underline{u}_{ot}, u_n) \mid \underline{u}(X_0, \xi) \text{ é campo de deslocamentos}$$

infinitesimais de K-L admissível, satisfazendo às condições de contorno previstas em $\partial \Sigma_m^v$

Def III

Var $\tilde{U}_{KL} = \{(\tilde{u}_{ot}, \tilde{u}_n) \mid \tilde{u}(X_0, \xi) \text{ é campo de deslocamentos infinitesimais virtual de K-L}\}$

O PTV nestas situações é equivalente ao PPV sendo válidos portanto, para o PTV, todos os resultados até então desenvolvidos.

Analisaremos, no restante do trabalho, o problema de Kirchhoff-Love segundo a formulação do PTV para problemas estáticos sob pequenas deformações e deslocamentos.

III.5. RELAÇÃO CONSTITUTIVA - MATERIAIS ISOTRÓPICOS

Na introdução das relações constitutivas para placas e cascas ante hipóteses de K-L, diversos autores WASHIZU (10), KRAUS (9) introduzem na formulação além das hipóteses cinemáticas, hipóteses sobre os campos de tensões considerando nulas as tensões normais (T_n). Estas hipóteses quando aplicadas a um material elástico isotrópico contrariam sua relação constitutiva. Outros autores KRAUS (9) considerando que para movimentos virtuais de K-L as tensões normais e cisalhantes (T_n, T_s) se apresentam como reações, introduzem na relação constitutiva a hipótese do material ser ortotrópico, rígido na direção normal e incapaz de sofrer distorções (potências cisalhantes e normais nulas). O enfoque aqui introduzido, seguindo o trabalho de DES

TUINDER (11), será fundamentalmente diferente.

Supondo-se trabalhar com materiais elásticos isotrópicos consideraremos (T_n) em ordem de grandeza muito inferior às componentes de T_t podendo ser desprezada na relação constitutiva.

Na formulação direta (bi-dimensional) do problema de K-L (Seção III.3.4-5) (T_n) e (T_s) não aparecem, constituindo-se reações a movimentos virtuais de K-L. Voltando-se entretanto ao princípio das potências virtuais formulado para o problema tri-dimensional, uma vez determinada (T_t) ; (T_s) e (T_n) poderão ser calculadas DESTUINDER (11).

Seguindo as hipóteses adotadas, para um material elástico isotrópico, a relação constitutiva se expressa por:

$$\frac{1 + \nu}{E} T - \frac{\nu}{E} (\text{Tr } (T)) I = E \quad (\text{III.28})$$

E , ν respectivamente módulo de Young e coeficiente de Poisson do material.

Aplicando-se o operador π , têm-se:

$$\frac{1 + \nu}{E} T_t - \frac{\nu}{E} (\text{Tr } (T)) I_d = E_t \quad (\text{III.29})$$

onde:

$$\text{Tr } (T) = \text{Tr } (T_t) + T_n$$

Dentro das hipóteses adotadas suporemos poder escrever:

$$\frac{1 + \nu}{E} T_t - \frac{\nu}{E} \text{Tr} (T_t) I_d = E_t \quad (\text{III.30a})$$

ou análogamente:

$$T_t = \frac{E}{(1 + \nu)} E_t + \frac{E \nu}{(1 - \nu^2)} \text{Tr} (E_t) I_d \quad (\text{III.30b})$$

de (III.20d-e) e Teorema III.1 poderemos expressar (III.30a-b) em termos das tensões e deformações generalizadas. Expressão componencial desta relação constitutiva (generalizada) será desenvolvida no Capítulo IV.

CAPÍTULO IV

FORMULAÇÃO DA TEORIA DE CASCAS EM COMPONENTES

IV.1. GENERALIDADES

Desenvolveremos neste capítulo expressões componenciais do PTV apresentado nos capítulos anteriores de forma intrínseca. Esta formulação é introduzida através do estudo da superfície média na qual se supõe poder parametrizá-la usando as direções principais de curvatura. Introduce-se uma base física ortonormal e expressões finais, em componentes físicas, são obtidas. Termina-se o capítulo desenvolvendo-se uma formulação matricial conveniente à resolução numérica do problema.

IV.2. SUPERFÍCIE MÉDIA - PROPRIEDADES INTRÍNSECAS

Considera-se a superfície média como imersa no espaço euclidiano tri-dimensional podendo portanto, suas propriedades, serem descritas através de uma representação paramétrica.

Seja $\{X, Y, Z\}$ um sistema de coordenadas cartesianas para o espaço euclidiano e $\underline{X}_0(\theta_1, \theta_2)$ uma representação paramétrica para a superfície média.

Vetores tangentes à superfície média ao longo das linhas paramétricas podem ser obtidos por:

$$\underline{a}_1 = \frac{\partial \underline{X}_0}{\partial \theta^1} ; \quad \underline{a}_2 = \frac{\partial \underline{X}_0}{\partial \theta^2} \quad (\text{IV.1})$$

\underline{a}_1 e \underline{a}_2 são linearmente independentes definindo portanto uma base local mas não são necessariamente ortogonais, adimensionais nem de módulo unitário. A esta base, denomina-se base covariante FLÜGGE (12).

A base $(\underline{a}^\beta ; \beta = 1, 2)$ tal que:

$$\underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta ; \quad \delta_\alpha^\beta = \text{delta de Kronecher} \quad (\text{IV.2})$$

denomina-se base contravariante ou dual.

Adotaremos as convenções:

(i)

$$\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} (\cdot) = (\cdot)_{,\alpha}$$

(ii) Índices alternados repetidos representam somatórios, a não ser que especificados o contrário;

- Índices latinos indicam somatório de 1 a 3;

- Índices gregos indicam somatório de 1 a 2.

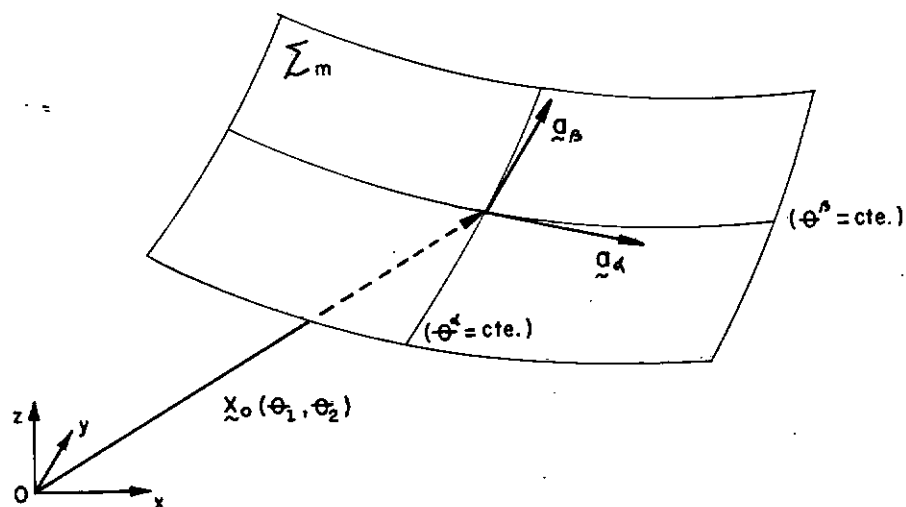


Figura IV.1 - Representação paramétrica para a superfície média

IV.2.1. PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL

Definida por:

$$d\tilde{X}_0 \cdot d\tilde{X}_0 = a_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta$$

onde:

$$a_{\alpha\beta} = \tilde{a}_\alpha \cdot \tilde{a}_\beta \quad (\text{IV.3})$$

O tensor $[a_{\alpha\beta}]$ denomina-se tensor métrico associado a superfície.

Define-se análogamente:

$$a^{\alpha\beta} = \tilde{a}^\alpha \cdot \tilde{a}^\beta ; a^\alpha_\beta = \tilde{a}^\alpha \cdot \tilde{a}_\beta ; a^\beta_\alpha = \tilde{a}_\alpha \cdot \tilde{a}^\beta \quad (\text{IV.4})$$

As componentes $(a_{\alpha\beta})$, $(a^{\alpha\beta})$, (a^β_α) e (a^α_β) sendo denomi

nadas respectivamente de covariantes, contravariantes e mixtas.

Sendo observado:

$$a^{\alpha\beta} \underline{a}_{\beta} = \underline{a}^{\alpha} \quad (\text{IV.5a})$$

$$a_{\alpha\beta} \underline{a}^{\beta} = \underline{a}_{\alpha} \quad (\text{IV.5b})$$

IV.2.2. SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

A normal unitária à superfície média ($\underline{n}(X_0)$) pode ser obtida por:

$$\underline{n}(\theta^1, \theta^2) = \frac{\underline{a}_1 \times \underline{a}_2}{|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|}$$

Como:

$$d\underline{n} \cdot \underline{n} = 0 \quad (\underline{n}_{,\alpha} \cdot \underline{n} = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, 2)$$

Define-se a segunda forma fundamental por:

$$\underline{n}_{,\alpha} = b_{\alpha\beta} \underline{a}^{\beta} = b_{\alpha}^{\beta} \underline{a}_{\beta} = b^{\alpha\beta} \underline{a}_{\beta} \quad (\text{IV.7})$$

O tensor $[b_{\alpha\beta}]$ denomina-se tensor de curvatura.

As componentes mixtas sendo definidas por:

$$b_{\alpha}^{\beta} = b_{\alpha\gamma} a^{\gamma\beta} = b^{\gamma\beta} a_{\gamma\alpha} \quad (\text{IV.8a})$$

$$b^{\alpha}_{\beta} = b_{\gamma\beta} a^{\gamma\alpha} = b^{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} \quad (\text{IV.8b})$$

O tensor de curvatura representa o gradiente superficial da normal.

Têm-se:

$$(\nabla \underline{n}) = (\nabla \underline{n})_{\alpha\beta} (\underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta)$$

$$\nabla \underline{n} \cdot \underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}_\beta = \underline{n}_{,\alpha} \cdot \underline{a}_\beta = (\nabla \underline{n})_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} \quad (\text{IV.9})$$

Como:

$$\underline{n} \cdot \underline{a}_{\alpha} = 0$$

$$\underline{n}_{,\beta} \cdot \underline{a}_\alpha = - \underline{n} \cdot \underline{a}_{\alpha,\beta} = - \underline{n} \cdot \underline{a}_{\beta,\alpha} = \underline{n}_{,\alpha} \cdot \underline{a}_\beta \quad (\text{IV.10})$$

Portanto:

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} \text{ (simetria do tensor de curvatura)} \quad (\text{IV.11})$$

sendo usado:

$$\underline{a}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 \underline{X}_0}{\partial \theta^\alpha \partial \theta^\beta} = \underline{a}_{\beta,\alpha} \quad (\text{IV.12})$$

IV.2.3. SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

São definidos por:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \underline{a}_{\alpha,\beta} \cdot \underline{a}_\gamma = \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \quad (\text{IV.13a})$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \underline{a}_{\alpha,\beta} \cdot \underline{a}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \quad (\text{IV.13b})$$

e podem ser obtidos através do tensor métrico, FLÜGGE (12)

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \{a_{\alpha\gamma,\beta} + a_{\beta\gamma,\alpha} - a_{\alpha\beta,\gamma}\} \quad (\text{IV.14a})$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} a^{\gamma\gamma} \{a_{\gamma\alpha,\beta} + a_{\gamma\beta,\alpha} - a_{\alpha\beta,\gamma}\} \quad (\text{IV.14b})$$

Para um sistema ortogonal têm-se:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \sqrt{a_{\alpha\alpha}} & (\text{IV.15a}) \\ \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} \sqrt{a_{\alpha\alpha}} & \alpha \neq \beta & (\text{IV.15b}) \\ \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha} &= - \frac{\sqrt{a_{\beta\beta}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \sqrt{a_{\beta\beta}} & \alpha \neq \beta & (\text{IV.15c}) \end{aligned} \right\} \text{sem somatório}$$

Os vetores $\{\underline{a}_{\alpha}, \alpha = 1, 2 \text{ e } \underline{n}\}$ definem uma base local para o espaço euclidiano tridimensional.

Sendo \underline{n} ortogonal a \underline{a}_{α} ($\alpha = 1, 2$) e de módulo unitário denotaremos:

$$\underline{n} = \underline{a}_3 = \underline{a}^3 \quad (\text{IV.16})$$

Conseqüentemente definimos:

$$\Gamma_{3\alpha\beta} = a_{3,\alpha} \cdot a_{\beta} = n_{,\alpha} \cdot a_{\beta} = b_{\alpha\beta} \quad (\text{IV.17})$$

de (IV.9-11) obtêm-se:

$$\Gamma_{3\alpha\beta} = -\Gamma_{\alpha\beta 3} = -\Gamma_{\beta\alpha 3} = b_{\alpha\beta} \quad (\text{IV.18})$$

Analogamente:

$$\Gamma_{3\alpha}^{\beta} = n_{,\alpha} \cdot \tilde{a}^{\beta} = b_{\alpha}^{\beta} \quad (\text{IV.19})$$

IV.2.4. DIREÇÕES PRINCIPAIS DE CURVATURA

O tensor de curvatura, sendo simétrico (IV.11), poderá ser decomposto, via sua decomposição espectral, tornando-se diagonal. Estas direções, segundo KRAUS (9), são ortogonais definindo sobre a superfície média uma parametrização ortogonal e os autovalores associados à decomposição espectral são respectivamente as curvaturas máximas e mínimas da superfície.

Sejam θ^1 e θ^2 direções principais de curvatura.

Os vetores tangentes (\tilde{a}_{α} , $\alpha = 1, 2$) são ortogonais e podemos definir localmente uma base ortonormal:

$$\tilde{a}_{\langle\alpha\rangle} = \frac{\tilde{a}_{\alpha}}{|\tilde{a}_{\alpha}|} \quad ; \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{IV.20})$$

A base ($\tilde{a}_{\langle\alpha\rangle}$; $\alpha = 1, 2$) sendo denominada de física.

Nesta parametrização, representaremos a primeira forma fundamental por:

$$d\tilde{X}_0 \cdot d\tilde{X}_0 = A^2 d\theta^1 d\theta^1 + B^2 d\theta^2 d\theta^2 \quad (\text{IV.21a})$$

$$A = \sqrt{\tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_1} \quad ; \quad B = \sqrt{\tilde{a}_2 \cdot \tilde{a}_2} \quad (\text{IV.21b})$$

O tensor de curvatura, na base física, admite a representação matricial:

$$[b_{\langle\alpha,\beta\rangle}] = \begin{vmatrix} -\frac{1}{R_1} & \phi \\ \phi & -\frac{1}{R_2} \end{vmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

R_α ; $\alpha = 1, 2$: raios de curvaturas principais.

Componentes dos campos vetoriais e tensoriais, na base física, serão representadas utilizando-se os símbolos: " $\langle \cdot \rangle$ ".

Sendo \underline{v}_{ot} um campo de ações de movimento, temos:

$$\underline{v}_{ot} = v_{ot\langle\alpha\rangle} \underline{a}_{\langle\alpha\rangle} \quad ; \text{somatório em } \alpha = 1, 2 \quad (\text{IV.23a})$$

denotaremos:

$$v_{ot\langle 1 \rangle} = U \quad ; \quad v_{ot\langle 2 \rangle} = V \quad \text{e} \quad v_n = W \quad (\text{IV.23b})$$

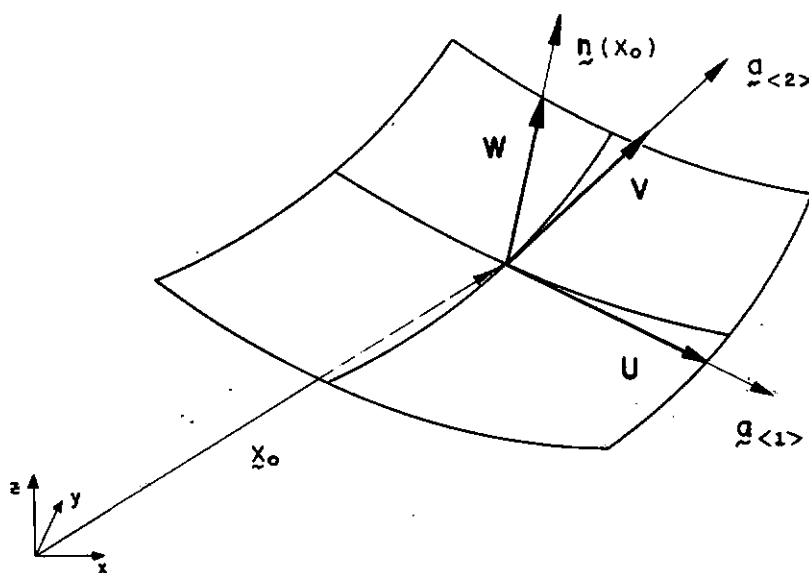


Figura IV.2 - Componentes físicas vetoriais

IV.3. O ESPAÇO DE CASCAS

Seguindo os resultados do Capítulo III, um ponto $X \in \Sigma$ pode ser representado por:

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + \xi \underline{n}(X_0) \quad ; \quad \xi \in [-h(X_0)/2, h(X_0)/2] \quad (\text{IV.24})$$

$$X_0 \in \Sigma_m$$

As coordenadas $(\theta^1, \theta^2, \xi)$, descrevem unívocamente os pontos da casca. Poderemos portanto definir uma base local para o espaço euclidiano por:

$$(\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3)$$

sendo:

$$\underline{g}_1 = \frac{\partial \underline{X}}{\partial \theta^1} \quad ; \quad \underline{g}_2 = \frac{\partial \underline{X}}{\partial \theta^2} \quad ; \quad \underline{g}_3 = \frac{\partial \underline{X}}{\partial \xi} \quad (\text{IV.25})$$

Derivando-se (IV.24) e considerando-se as direções principais de curvatura, obteremos:

$$\underline{g}_\alpha = \left[1 - \frac{\xi}{R_\alpha} \right] \underline{a}_\alpha \quad ; \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{IV.26a})$$

$$\underline{g}_3 = \underline{n} \quad (\text{IV.26b})$$

O tensor métrico reduz-se a:

$$|g_{ij}| = \begin{bmatrix} A^2 \left[1 - \frac{\xi}{R_1} \right]^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 \left[1 - \frac{\xi}{R_2} \right]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

O elemento de volume pode ser expresso pelo produto misto:

$$d\Sigma = (\underline{g}_1 d\theta^1 \times \underline{g}_2 d\theta^2) \cdot \underline{g}_3 d\xi \quad (\text{IV.28})$$

mas

$$\underline{g}_1 \times \underline{g}_2 = \epsilon_{123} \underline{g}^3 \quad (\text{IV.29})$$

ϵ_{123} : tensor de permutação (veja FLÜGGE (12)).

Sendo

$$\epsilon_{123} = (\det [g_{ij}])^{1/2}$$

denotaremos:

$$g = \det [g_{ij}] \quad (\text{IV.30})$$

$$a = \det [a_{ij}] \quad (\text{IV.31})$$

portanto:

$$d\Sigma = g \, d\xi \, d\theta^1 \, d\theta^2 = AB \left(1 - \frac{\xi}{R_1}\right) \left(1 - \frac{\xi}{R_2}\right) d\xi \, d\theta^1 \, d\theta^2 \quad (\text{IV.32})$$

ou análogamente

$$d\Sigma = \det \Lambda \, d\Sigma_m \quad (\text{IV.33})$$

sendo:

(i)

$$d\Sigma_m = AB \, d\theta^1 \, d\theta^2 ;$$

elemento de área sobre a superfície média

(ii)

$$\Lambda = I_d + \xi \nabla n$$

IV.4. DEFORMAÇÕES GENERALIZADAS

As deformações generalizadas sendo definidas por:

$$\epsilon = \pi \nabla \underline{v}_{ot} + v_n \nabla n$$

$$\chi = \pi \nabla \underline{\theta} ; \quad \underline{\theta} = \underline{\nabla} n \, \underline{v}_{ot} - \nabla v_n$$

Serão úteis as expressões componenciais para os gradientes envolvidos:

(i) de (IV.2.2):

$$\nabla \underline{n} = b_{\beta}^{\alpha} (a_{\alpha} \otimes a^{\beta}) \quad (\text{IV.34})$$



(ii) sendo:

$$\underline{v}_{ot} = v_{ot}^{\gamma} \underline{a}_{\gamma}$$

teremos:

$$\pi \nabla \underline{v}_{ot} = v_{ot}^{\gamma} \pi \nabla \underline{a}_{\gamma} + (\underline{a}_{\gamma} \otimes \pi \nabla v_{ot}^{\gamma})$$

mas:

$$(\pi \nabla \underline{a}_{\gamma})_{\beta}^{\alpha} = (\pi \nabla \underline{a}_{\gamma}) \cdot \underline{a}_{\alpha}^{\beta} = \underline{a}_{\gamma, \alpha} \cdot a^{\beta} = \Gamma_{\gamma \alpha}^{\beta} \quad (\text{IV.35})$$

$$\pi \nabla v_{ot}^{\gamma} = v_{ot, \beta}^{\gamma} \underline{a}^{\beta} \quad (\text{IV.36})$$

portanto de (IV.35-36) e por uma troca conveniente de índices temos:

$$\pi \nabla \underline{v}_{ot} = (v_{ot, \beta}^{\alpha} + v_{ot}^{\gamma} \Gamma_{\gamma \beta}^{\alpha}) (\underline{a}_{\alpha} \otimes \underline{a}^{\beta}) \quad (\text{IV.37})$$

A derivada covariante de v_{ot}^{α} sendo definida por:

$$v_{ot}^{\alpha} ||_{\beta} = (v_{ot, \beta}^{\alpha} + v_{ot}^{\gamma} \Gamma_{\gamma \beta}^{\alpha}) \quad (\text{IV.38})$$

resulta-nos:

$$\pi \nabla v_{ot} = v_{ot}^{\alpha} | |_{\beta} (\underline{a}_{\alpha} \otimes \underline{a}^{\beta}) \quad (\text{IV.39})$$



(iii) tomando-se:

$$\underline{\theta} = \nabla n \underline{v}_{ot} - \nabla v_n \quad (\text{IV.40})$$

temos:

$$\underline{\theta} = b_{\gamma}^{\alpha} (\underline{a}^{\gamma} \otimes \underline{a}_{\alpha}) (v_{ot}^{\lambda} \underline{a}_{\lambda}) - v_{n,\lambda} \underline{a}^{\lambda}$$

de (IV.2), segue-se:

$$\underline{\theta} = b_{\gamma}^{\alpha} \delta_{\lambda}^{\gamma} v_{ot}^{\lambda} \underline{a}_{\alpha} - v_{n,\lambda} \underline{a}^{\lambda\alpha} \underline{a}_{\alpha}$$

Simplificando encontraremos:

$$\theta^{\alpha} = [b_{\lambda}^{\alpha} v_{ot}^{\lambda} - v_{n,\lambda} \underline{a}^{\lambda\alpha}] \quad (\text{IV.41})$$

Seguindo os resultados em (ii), têm-se:

$$(\pi \nabla \underline{\theta})_{\beta}^{\alpha} = \theta^{\alpha} | |_{\beta}$$

Usando as propriedades operacionais das derivadas covariantes e o Lema de Rici (derivada covariante do tensor métrico é nula) resulta-nos:

$$(\pi \nabla \underline{\theta})_{\beta}^{\alpha} = [b_{\lambda}^{\alpha} | |_{\beta} v_{ot}^{\lambda} + b_{\lambda}^{\alpha} v_{ot}^{\lambda} | |_{\beta} - v_{n,\lambda} | |_{\beta} \underline{a}^{\lambda\alpha}] \quad (\text{IV.41})$$



de (i)-(iii), as deformações generalizadas são expressas compo-

nencialmente (na base mixta $(\underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}^\beta)$) por:

$$\epsilon = (v_{ot}^\alpha ||_\beta + v_n b_{\beta}^\alpha) (\underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}^\beta) \quad (IV.43a)$$

$$\chi = [b_{\lambda}^\alpha ||_\beta v_{ot}^\lambda + b_{\lambda}^\alpha v_{ot}^\lambda ||_\beta - v_{n,\lambda} ||_\beta \underline{a}^{\lambda\alpha}] [\underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}^\beta] \quad (IV.43b)$$

IV.5. COMPONENTES FÍSICAS

A base para o plano tangente $(\underline{a}_\alpha; \alpha = 1, 2)$, definida em (IV.1), e sua dual (IV.2), numa parametrização genérica (θ^1, θ^2) , não são em geral unitárias, adimensionais nem ortogonais. Para o caso particular, entretanto, da parametrização da superfície média através das direções principais de curvatura (IV.2.4), estas bases serão ortogonais; poderemos conseqüentemente ortornormalizá-las. As componentes vetoriais e tensoriais nesta base orto-normalizada (adimensional) possuem como característica básica as mesmas unidades que as grandezas físicas ao qual representam e possibilitam portanto uma interpretação física mais conveniente.

Suporemos no restante do trabalho parametrizar a superfície média através das direções principais de curvatura, estando portanto implícita esta hipótese nos desenvolvimentos componentes das expressões que se seguem.

Seja a base física, definida em (IV.20) por:

$$\underline{a}_{<\alpha>} = \frac{\underline{a}_\alpha}{|\underline{a}_\alpha|} \quad ; \quad \alpha = 1, 2 \quad (IV.44)$$

As direções principais, sendo ortogonais, diagonalizam o tensor métrico, portanto:

$$|\underline{a}_{\alpha}| = \sqrt{a_{\alpha\alpha}} \quad ; \quad |\underline{a}^{\alpha}| = \sqrt{a^{\alpha\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \quad (\text{IV.45a-b})$$

Seja \underline{v}_t um campo vetorial tangente, têm-se:

$$\underline{v}_t = v_t^{\alpha} \underline{a}_{\alpha} = v_t^{\alpha} \sqrt{a_{\alpha\alpha}} \underline{a}_{<\alpha>}$$

logo:

$$v_{t<\alpha>} = (v_t)^{\alpha} \sqrt{a_{\alpha\alpha}} \quad ; \quad \text{sem soma} \quad (\text{IV.46a})$$

análogamente:

$$v_{t<\alpha>} = \frac{(v_t)_{\alpha}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \quad ; \quad \text{sem soma} \quad (\text{IV.46b})$$

Componentes físicas tensoriais poderão ser similarmente obtidas:

Seja

$$A \in \text{Lin}(\nu, \nu)$$

$$A = A^{\alpha}_{\beta} (\underline{a}_{\alpha} \otimes \underline{a}^{\beta}) = A^{\alpha}_{\beta} \frac{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a_{\beta\beta}}} (\underline{a}_{<\alpha>} \otimes \underline{a}_{<\beta>})$$

portanto:

$$A_{<\alpha>, <\beta>} = A^{\alpha}_{\beta} \frac{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a_{\beta\beta}}} \quad (\text{IV.47})$$

As deformações generalizadas nesta base física são expressas, seguindo os resultados (IV.43-47), por:

$$\epsilon_{\langle\alpha\beta\rangle} = \left\{ \frac{V_{ot\langle\alpha\rangle}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \right\|_{\beta} + V_n \frac{\sqrt{a_{\beta\beta}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} b_{\langle\alpha\beta\rangle} \right\} \frac{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a_{\beta\beta}}} ; \text{ sem somatório} \quad (IV.48a)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\langle\alpha\beta\rangle} = & \left\{ \left[\frac{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} b_{\langle\alpha\gamma\rangle} \right] \right\|_{\beta} \frac{V_{ot\langle\gamma\rangle}}{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}} + \frac{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} b_{\langle\alpha\gamma\rangle} \left[\frac{V_{ot\langle\gamma\rangle}}{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}} \right] \right\|_{\beta} - \\ & - a^{\gamma\alpha} V_{n,\gamma} \left\|_{\beta} \right\} \frac{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\sqrt{a_{\beta\beta}}} ; \text{ somatório em } \gamma \end{aligned} \quad (IV.48b)$$

IV.5.1. DESENVOLVIMENTO DE $\epsilon_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ EM COMPONENTES FÍSICAS

Aplicando a derivação covariante em (IV.48a):

$$\begin{aligned} \frac{V_{ot\langle\alpha\rangle}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \right\|_{\beta} = & \frac{\partial V_{ot\langle\alpha\rangle}}{\partial \theta^{\beta}} \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} - \frac{V_{ot\langle\alpha\rangle}}{a_{\alpha\alpha}} \left[\frac{\partial \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\partial \theta^{\beta}} \right] + \\ & + \frac{V_{ot\langle\gamma\rangle}}{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}} \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} ; \text{ somatório em } \gamma \end{aligned} \quad (IV.49)$$

e usando (IV.15a-c) e (IV.22) teremos:

(i) seja $\alpha = \beta$:

$$\epsilon_{\langle\alpha\alpha\rangle} = \frac{V_{ot\langle\alpha\rangle}}{\partial\theta^\alpha} \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} - \frac{V_{ot\langle\alpha\rangle}}{a_{\alpha\alpha}} \left[\frac{\partial \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\partial\theta^\beta} \right] +$$

$$+ \frac{V_{ot\langle\gamma\rangle}}{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}} \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\partial\theta^\gamma} - \frac{V_n}{R_\alpha} ; \text{somat\u00f3rio em } \gamma$$

Simplificando resulta:

$$\epsilon_{\langle\alpha\alpha\rangle} = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} (V_{ot\langle\alpha\rangle}) \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} + \frac{V_{ot\langle\beta\rangle}}{\sqrt{a_{\beta\beta}}} \left[\frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\partial\theta^\beta} \right] - \frac{V_n}{R_\alpha} ;$$

$\alpha \neq \beta$, sem somat\u00f3rio

(IV.50)

(ii) $\alpha \neq \beta$:

$$\epsilon_{\langle\alpha,\beta\rangle} = \left\{ \left[\frac{\partial (V_{ot\langle\alpha\rangle})}{\partial\theta^\beta} \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} - \frac{V_{ot\langle\alpha\rangle}}{a_{\alpha\alpha}} \frac{\partial \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\partial\theta^\beta} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{V_{ot\langle\gamma\rangle}}{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}} \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \right] \sqrt{\frac{a_{\alpha\alpha}}{a_{\beta\beta}}} \right\} ; \text{somat\u00f3rio em } \gamma$$

(IV.51)

An\u00e1logamente:

$$\sum_\gamma \frac{V_{ot\langle\gamma\rangle}}{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}} \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha = \frac{V_{ot\langle\alpha\rangle}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha + \frac{V_{ot\langle\beta\rangle}}{\sqrt{a_{\beta\beta}}} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha ; \text{sem somat\u00f3rio}$$

$$= \frac{V_{ot\langle\alpha\rangle}}{a_{\alpha\alpha}} \frac{\partial \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\partial\theta^\beta} - \frac{V_{ot\langle\beta\rangle}}{a_{\alpha\alpha}} \frac{\partial \sqrt{a_{\beta\beta}}}{\partial\theta^\alpha} ; \text{sem somat\u00f3rio}$$

(IV.52)

Substituindo-se (IV.52) em (IV.51) e ap\u00f3s simplifica\u00e7\u00f5es encontraremos:

$$\epsilon_{\langle\alpha\beta\rangle} = \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} V_{ot\langle\alpha\rangle} \left[\frac{1}{\sqrt{a_{\beta\beta}}} \right] - \frac{V_{ot\langle\beta\rangle}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}} \sqrt{a_{\beta\beta}}} \left[\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \sqrt{a_{\beta\beta}} \right] \right\} \quad (\text{IV.53})$$

De (IV.50) e (IV.53) e adotando as notações introduzidas em (IV.21) e (IV.23):

$$U = V_{ot\langle 1 \rangle} \quad ; \quad V = V_{ot\langle 2 \rangle} \quad ; \quad W = V_n$$

$$A = \sqrt{a_{11}} \quad ; \quad B = \sqrt{a_{22}}$$

Segue-se finalmente:

$$\epsilon_{\langle 1,1 \rangle} = \left[\frac{\partial}{\partial\theta^1} U \right] \frac{1}{A} + \frac{V}{AB} \frac{\partial}{\partial\theta^2} (A) - \frac{W}{R_1} \quad (\text{IV.54a})$$

$$\epsilon_{\langle 2,2 \rangle} = \left[\frac{\partial}{\partial\theta^2} V \right] \frac{1}{B} + \frac{U}{AB} \frac{\partial}{\partial\theta^1} (B) - \frac{W}{R_2} \quad (\text{IV.54b})$$

$$\epsilon_{\langle 1,2 \rangle} = \left[\frac{\partial}{\partial\theta^2} U \right] \frac{1}{B} - \frac{V}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial\theta^1} (B) \right] \quad (\text{IV.54c})$$

$$\epsilon_{\langle 2,1 \rangle} = \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial\theta^1} V \right] - \frac{U}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial\theta^2} (A) \right] \quad (\text{IV.54d})$$

IV.5.2. DESENVOLVIMENTO DE $\chi_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ EM COMPONENTES FÍSICAS

(i) Derivada covariante do tensor de curvatura:

$$b_{\gamma\beta}^{\alpha}{}_{||\beta} = (b_{\gamma}^{\alpha})_{,\beta} + b_{\gamma}^{\Omega} \Gamma_{\beta\Omega}^{\alpha} - b_{\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\gamma\beta}^{\Omega} \quad ; \quad \text{somatório em } \Omega$$

Em componentes físicas:

$$\left[\frac{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} b_{\langle\alpha\gamma\rangle} \right]_{,\beta} = \left[\frac{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} b_{\langle\alpha\gamma\rangle} \right]_{,\beta} + \left[\frac{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}}{\sqrt{a_{\Omega\Omega}}} b_{\langle\Omega\gamma\rangle} \right] \Gamma_{\beta\Omega}^{\alpha} -$$

$$- \left[\frac{\sqrt{a_{\Omega\Omega}}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} b_{\langle\alpha\Omega\rangle} \right] \Gamma_{\gamma\beta}^{\Omega} ; \text{ somatório em } \Omega$$

De (IV.22) segue-se:

$$\left[\frac{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}}{a_{\alpha\alpha}} b_{\langle\alpha\gamma\rangle} \right]_{,\beta} = \left[\frac{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}}{a_{\alpha\alpha}} b_{\langle\alpha\gamma\rangle} \right]_{,\beta} + \left[\frac{1}{R_{\alpha}} \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} - \frac{1}{R_{\gamma}} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \right] ;$$

sem somatório

(IV.55)

Usando a simetria dos símbolos de Christoffel (IV.13-15), resulta:

$$\left[\frac{1}{R_{\alpha}} \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} - \frac{1}{R_{\gamma}} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \right] = \left[\frac{1}{R_{\alpha}} - \frac{1}{R_{\gamma}} \right] \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \quad (IV.56)$$

(ii) $(b_{\gamma}^{\alpha} \parallel_{\beta} v_{ot}^{\gamma})$ em componentes físicas:

De (IV.55-56) têm-se:

$$(b_{\gamma}^{\alpha} \parallel_{\beta} v_{ot}^{\gamma}) = \left\{ \left[\frac{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}}{a_{\alpha\alpha}} b_{\langle\alpha\gamma\rangle} \right]_{,\beta} + \left[\frac{1}{R_{\alpha}} - \frac{1}{R_{\gamma}} \right] \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \right\} \frac{v_{ot\langle\gamma\rangle}}{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}} ;$$

somatório em γ

Particularizando-se, temos:

(a) $(\alpha = \beta)$

$$(b_{\gamma}^{\alpha} \parallel_{\alpha} v_{ot}^{\gamma}) = \left\{ \left[-\frac{1}{R_{\alpha}} \right]_{,\alpha} \frac{v_{ot\langle\alpha\rangle}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} + \left[\frac{1}{R_{\alpha}} - \frac{1}{R_{\gamma}} \right] \Gamma_{\Omega\alpha}^{\alpha} \frac{v_{ot\langle\Omega\rangle}}{\sqrt{a_{\Omega\Omega}}} \right\} ;$$

sem somatório e $\Omega \neq \alpha$

para um sistema ortogonal, entretanto (IV.15a-c):

$$\Gamma_{\Omega\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta^{\Omega}} \sqrt{a_{\alpha\alpha}} \right] ; \quad \alpha \neq \Omega$$

Segue-se:

$$(b_{\gamma}^{\alpha} \parallel_{\alpha} v_{ot}^{\gamma}) = \left\{ - \frac{v_{ot<\alpha>}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \left[\frac{1}{R_{\alpha}} \right]_{,\alpha} + \left[\frac{1}{R_{\alpha}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{R_{\Omega}} \right] \frac{v_{ot<\Omega>}}{\sqrt{a_{\Omega\Omega}} \sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta^{\Omega}} \sqrt{a_{\alpha\alpha}} \right] \right\}; \text{ sem somatório} \\ \text{e } \Omega \neq \alpha \quad (IV.57)$$

(b) ($\alpha \neq \beta$) análogamente encontraremos:

$$(b_{\gamma}^{\alpha} \parallel_{\beta} v_{ot}^{\gamma}) = \left\{ - \frac{v_{ot<\alpha>}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \left[\frac{1}{R_{\alpha}} \right]_{,\beta} - \left[\frac{1}{R_{\alpha}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{R_{\beta}} \right] \frac{v_{ot<\beta>}}{a_{\alpha\alpha}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \sqrt{a_{\beta\beta}} \right] \right\}; \text{ sem somatório} \quad (IV.58)$$



(iii) ($b_{\gamma}^{\alpha} (v_{ot}^{\gamma} \parallel_{\beta})$) em componentes físicas:

De (IV.22) e (IV.49):

$$(b_{\gamma}^{\alpha} (v_{ot}^{\gamma} \parallel_{\beta})) = \left[\sqrt{\frac{a_{\gamma\gamma}}{a_{\alpha\alpha}}} b_{<\alpha\gamma>} \left[\frac{1}{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} (v_{ot<\gamma>}) \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{v_{ot<\gamma>}}{a_{\gamma\gamma}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} \sqrt{a_{\gamma\gamma}} + \frac{v_{ot<\Omega>}}{\sqrt{a_{\Omega\Omega}}} \Gamma_{\Omega\beta}^{\gamma} \right] \right] \right\}; \text{ somatório} \\ \text{em } \gamma, \Omega$$

$$(b^{\alpha}_{\gamma}(V^{\alpha}_{ot}\|_{\beta})) = \left\{ \left[-\frac{1}{R_{\alpha}} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} [V_{ot<\alpha>}] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{V_{ot<\alpha>}}{a_{\alpha\alpha}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} [\sqrt{a_{\alpha\alpha}}] + \frac{V_{ot<\Omega>}}{\sqrt{a_{\Omega\Omega}}} \Gamma^{\alpha}_{\Omega\beta} \right] \right\};$$

somatório em Ω

(IV.59)

(a) Seja $\alpha = \beta$:

$$\sum_{\Omega} \frac{V_{ot<\Omega>}}{\sqrt{a_{\Omega\Omega}}} \Gamma^{\alpha}_{\Omega\beta} = \frac{V_{ot<\alpha>}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \left[\frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \sqrt{a_{\alpha\alpha}} \right] + \\ + \frac{V_{ot<\gamma>}}{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}} \left[\frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\gamma}} \sqrt{a_{\alpha\alpha}} \right]; \text{ sem somatório ; } \alpha \neq \gamma$$

(IV.60a)

(b) Seja $\alpha \neq \beta$:

$$\sum_{\Omega} \frac{V_{ot<\Omega>}}{\sqrt{a_{\Omega\Omega}}} \Gamma^{\alpha}_{\Omega\beta} = \frac{V_{ot<\alpha>}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \left[\frac{1}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} \sqrt{a_{\alpha\alpha}} \right] - \\ - \frac{V_{ot<\beta>}}{\sqrt{a_{\beta\beta}}} \left[\frac{\sqrt{a_{\beta\beta}}}{a_{\alpha\alpha}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \sqrt{a_{\beta\beta}} \right]; \text{ sem somatório}$$

(IV.60b)

$$(iv) a^{\gamma\alpha} (V_{n,\gamma}\|_{\beta}) = a^{\gamma\alpha} V_{n,\gamma\beta} - a^{\gamma\alpha} V_{n,\Omega} \Gamma^{\Omega}_{\gamma\beta}$$

(a) Seja $\alpha = \beta$:

$$a^{\gamma\alpha} (V_{n,\gamma}\|_{\alpha}) = \frac{1}{a_{\alpha\alpha}} \left[V_{n,\alpha\alpha} - \frac{V_{n,\alpha}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \sqrt{a_{\alpha\alpha}} + \right. \\ \left. + W_{,\gamma} \frac{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{a_{\gamma\gamma}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\gamma}} \sqrt{a_{\alpha\alpha}} \right] \gamma \neq \alpha; \text{ sem somatório}$$

(IV.61a)

(b) $\alpha \neq \beta$:

$$a^{\gamma\alpha} (V_{n,\gamma} \parallel_{\beta}) = \frac{1}{a_{\alpha\alpha}} \left\{ V_{n,\alpha\beta} - \frac{V_{n,\alpha}}{a_{\alpha\alpha} \sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} \sqrt{a_{\alpha\alpha}} - \right. \\ \left. - \frac{V_{n,\beta}}{\sqrt{a_{\beta\beta}}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \sqrt{a_{\beta\beta}} \right\} ; \text{ sem somatório} \quad (IV.61b)$$

□

De (i) a (iv) e seguindo as notações definidas em (IV.21) e (IV.23) resulta, após algumas simplificações:

$$\chi_{<1,1>} = - \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \theta^1} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \theta^1} + \frac{U}{R_1} \right] + \frac{1}{AB} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial \theta^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{V}{R_2} \right] \frac{\partial A}{\partial \theta^2} \right\} \quad (IV.62a)$$

$$\chi_{<2,2>} = - \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial \theta^2} + \frac{V}{R_2} \right] + \frac{1}{AB} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \theta^1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{U}{R_1} \right] \frac{\partial B}{\partial \theta^1} \right\} \quad (IV.62b)$$

$$\chi_{<1,2>} = - \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \theta^1} + \frac{U}{R_1} \right] - \frac{1}{AB} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial \theta^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{V}{R_2} \right] \frac{\partial B}{\partial \theta^1} \right\} \quad (IV.62c)$$

$$X_{<2,1>} = - \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \theta^1} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial \theta^2} + \frac{V}{R_2} \right] - \frac{1}{AB} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \theta^1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{U}{R_1} \right] \frac{\partial A}{\partial \theta^2} \right\} \quad (\text{IV.62d})$$

IV.6. TENSÕES GENERALIZADAS

As tensões generalizadas são descritas por (III.20d-e):

$$N_t = \int_{-h/2}^{h/2} T_t \Lambda^{-1} \det \Lambda \, d\xi$$

$$M_t = \int_{-h/2}^{h/2} T_t \Lambda^{-1} \det \Lambda \, \xi \, d\xi$$

$\Lambda = I_d + \xi \nabla n$ (Def. III.7) sendo descrito matricialmente, usando-se as direções principais de curvatura (IV.20-22), por:

$$[\Lambda] = \begin{vmatrix} \left[1 - \frac{\xi}{R_1}\right] & 0 \\ 0 & \left[1 - \frac{\xi}{R_2}\right] \end{vmatrix}; \det \Lambda = \left[1 - \frac{\xi}{R_1}\right] \left[1 - \frac{\xi}{R_2}\right] \quad (\text{IV.63a-b})$$

Análogamente:

$$[\Lambda^{-1}] = \begin{vmatrix} \left[1 - \frac{\xi}{R_1}\right]^{-1} & 0 \\ 0 & \left[1 - \frac{\xi}{R_2}\right]^{-1} \end{vmatrix} \quad (\text{IV.64.})$$

Portanto:

$$[N_t] = \int_{-h(X_0)/2}^{h(X_0)/2} \begin{vmatrix} T_{<1,1>} & T_{<1,2>} \\ T_{<2,1>} & T_{<2,2>} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1-\xi/R_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (1-\xi/R_2)^{-1} \end{vmatrix} [1-\xi/R_1][1-\xi/R_2] d\xi \quad (IV.65)$$

introduzindo-se o fator (ξ) em (IV.65) obteremos $[M_t]$.

Após simplificações segue-se:

$$N_{<\alpha\alpha>} = \int_{-h(X_0)/2}^{h(X_0)/2} T_{<\alpha\alpha>} \left[1 - \frac{\xi}{R_\beta} \right] d\xi \quad ; \quad \alpha \neq \beta \quad (IV.66a)$$

$$N_{<\alpha\beta>} = \int_{-h(X_0)/2}^{h(X_0)/2} T_{<\alpha\beta>} \left[1 - \frac{\xi}{R_\alpha} \right] d\xi \quad ; \quad \alpha \neq \beta \quad (IV.66b)$$

Analogamente:

$$M_{<\alpha\alpha>} = \int_{-h(X_0)/2}^{h(X_0)/2} T_{<\alpha\alpha>} \left[1 - \frac{\xi}{R_\beta} \right] \xi d\xi \quad ; \quad (IV.67a)$$

$$M_{<\alpha\beta>} = \int_{-h(X_0)/2}^{h(X_0)/2} T_{<\alpha\beta>} \left[1 - \frac{\xi}{R_\alpha} \right] \xi d\xi \quad ; \quad \alpha \neq \beta \quad (IV.67b)$$

IV.7. RELAÇÃO CONSTITUTIVA

A relação constitutiva, na base física (IV.20), para um material elástico e isotrópico, pode ser expressa, seguindo (III.30), por:

$$T_t = \frac{IE}{1 - \nu^2} [(1 - \nu) E_t + \nu T_r (E_t) I_d]$$

em componentes, segue-se:

$$T_{t\langle\alpha\alpha\rangle} = \frac{IE}{1 - \nu^2} \{E_{t\langle\alpha\alpha\rangle} + \nu E_{t\langle\beta\beta\rangle}\}$$

$$T_{t\langle\alpha\beta\rangle} = \frac{IE}{(1 + \nu)} E_{t\langle\alpha\beta\rangle} = G \gamma_{\langle\alpha\beta\rangle} \quad ; \quad \alpha \neq \beta \quad (\text{IV.68a})$$

sendo:

$$G = \frac{1}{2} \frac{IE}{(1 + \nu)} \quad ; \quad \gamma_{\langle\alpha\beta\rangle} = 2 E_{\langle\alpha\beta\rangle} \quad (\text{IV.68b})$$

E_t pode, por sua vez, ser expresso em termos das deformações generalizadas. Seguindo os resultados (II.20a), (II.30), (Teorema III.1); (III.20b-c) têm-se:

$$E_t = \frac{1}{2} \left\{ [\epsilon + \xi \chi] \Lambda^{-1} + \Lambda^{-1} [\epsilon^T + \xi \chi^T] \right\} \quad (\text{IV.69})$$

em componentes físicas teremos:

$$E_{t\langle\alpha\alpha\rangle} = \frac{\epsilon_{\langle\alpha\alpha\rangle} + \xi \chi_{\langle\alpha\alpha\rangle}}{\left[1 - \frac{\xi}{R_\alpha}\right]} \quad (\text{IV.70a})$$

$$2 E_{t<\alpha\beta>} = \gamma_{t<\alpha\beta>} = \left\{ \frac{\epsilon_{<\alpha\beta>} + \xi \chi_{<\alpha\beta>}}{(1 - \xi/R_\beta)} + \frac{\epsilon_{<\beta\alpha>} + \xi \chi_{<\beta\alpha>}}{(1 - \xi/R_\alpha)} \right\} \quad (\text{IV.70b})$$

De (IV.68-70) segue-se:

$$T_{t<\alpha\alpha>} = \left[\frac{IE}{1 - v^2} \right] \left\{ \frac{\epsilon_{<\alpha\alpha>} + \xi \chi_{<\alpha\alpha>}}{(1 - \xi/R_\alpha)} + v \left[\frac{\epsilon_{<\beta\beta>} + \xi \chi_{<\beta\beta>}}{(1 - \xi/R_\beta)} \right] \right\} \quad (\text{IV.71a})$$

$$T_{t<\alpha\beta>} = \left[\frac{IE}{1 + v} \right] \frac{1}{2} \left\{ \frac{\epsilon_{<\alpha\beta>} + \xi \chi_{<\alpha\beta>}}{(1 - \xi/R_\beta)} + \frac{\epsilon_{<\beta\alpha>} + \chi_{<\beta\alpha>}}{(1 - \xi/R_\alpha)} \right\} \quad (\text{IV.71b})$$

As tensões generalizadas poderão, em suma, ser expressas por:

$$N_{<\alpha\alpha>} = \left[\frac{IE}{1 - v^2} \right] \left\{ \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta} d\xi \right] \epsilon_{<\alpha\alpha>} + v h \epsilon_{<\beta\beta>} + \right. \\ \left. + \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_\beta}{\rho_\alpha} \xi d\xi \right] \chi_{<\alpha\alpha>} \right\} \quad (\text{IV.72a})$$

$$N_{<\alpha\beta>} = G \left\{ \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta} d\xi \right] \epsilon_{<\alpha\beta>} + h \epsilon_{<\beta\alpha>} + \right. \\ \left. + \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta} \xi d\xi \right] \chi_{<\alpha\beta>} \right\} \quad (\text{IV.72b})$$

$$\begin{aligned}
 M_{\langle\alpha\alpha\rangle} = & \left[\frac{E}{1 - \nu^2} \right] \left\{ \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_\beta}{\rho_\alpha} \xi \, d\xi \right] \epsilon_{\langle\alpha\alpha\rangle} + \right. \\
 & \left. + \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_\beta}{\rho_\alpha} \xi^2 \, d\xi \right] \chi_{\langle\alpha\alpha\rangle} + \frac{\nu h^3}{12} \chi_{\langle\beta\beta\rangle} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{IV.72c}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\langle\alpha\beta\rangle} = & G \left\{ \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta} \xi \, d\xi \right] \epsilon_{\langle\alpha\beta\rangle} + \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta} \xi^2 \, d\xi \right] \chi_{\langle\alpha\beta\rangle} + \right. \\
 & \left. + \frac{h^3}{12} \chi_{\langle\beta\alpha\rangle} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{IV.72d}$$

sendo:

$$\rho_\alpha = \left[1 - \frac{\xi}{R_\alpha} \right] \quad ; \quad \rho_\beta = \left[1 - \frac{\xi}{R_\beta} \right]$$

As integrais são desenvolvidas no Apêndice B.

IV.8. FORMULAÇÃO MATRICIAL DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Dos resultados já desenvolvidos neste capítulo, expressões componenciais poderão ser desenvolvidas para a formulação tensorial do princípio dos trabalhos virtuais. Não será entre tanto adotada esta formulação mas sim uma matricial que nos será conveniente; na aplicação do método dos elementos finitos (Capítulo V).

Definimos os vetores:

$$\underline{U}^T = \{U, V, W\}$$

onde:

$$U = v_{ot<1>} ; V = v_{ot<2>} ; W = v_n \quad (IV.73)$$

\underline{U} : vetor de deslocamentos

$$\underline{f}^T = \{f_1, f_2, f_3\} \quad (IV.74)$$

\underline{f} : vetor de solicitações

$$\underline{\epsilon}^T = \{\epsilon_{<1,1>}, \epsilon_{<2,2>}, \epsilon_{<1,2>}, \epsilon_{<2,1>}, \chi_{<1,1>}, \chi_{<2,2>}, \chi_{<1,2>}, \chi_{<2,1>}\} \quad (IV.75)$$

$\underline{\epsilon}$: vetor de deformações generalizadas

$$\underline{S}^T = \{N_{<1,1>}, N_{<2,2>}, N_{<1,2>}, N_{<2,1>}, M_{<1,1>}, M_{<2,2>}, M_{<1,2>}, M_{<2,1>}\} \quad (IV.76)$$

\underline{S} : vetor de tensões generalizadas

Estando as deformações generalizadas relacionadas com os deslocamentos nas expressões (IV.54) e (IV.62), poderemos definir o operador (\mathbb{L}):

$$\underline{\epsilon} = \mathbb{L} \underline{U} \quad (IV.77)$$

\mathbb{L} representado na Figura (IV.3).

A relação constitutiva (IV.72a-d) pode ser representada matricialmente por:

$\frac{1}{A} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^1}$	$\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \theta^2}$	$- K_1$
$\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \theta^1}$	$\frac{1}{B} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^2}$	$- K_2$
$\frac{1}{B} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^2}$	$-\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \theta^1}$	$-$
$-\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \theta^2}$	$\frac{1}{A} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^1}$	$-$
$-\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \theta^1} (K_1) - \frac{K_1}{A} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^1}$	$-\frac{K_2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \theta^2}$	$\frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial \theta^1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^1} - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \theta^2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^2} - \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \theta^1 \partial \theta^1}$
$-\frac{K_1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \theta^1}$	$-\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \theta^2} (K_2) - \frac{K_2}{B} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^2}$	$\frac{1}{B^3} \frac{\partial B}{\partial \theta^2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^2} - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \theta^1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^1} - \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \theta^2 \partial \theta^2}$
$-\frac{1}{B} \frac{\partial K_1}{\partial \theta^2} - \frac{K_1}{B} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^2}$	$\frac{K_2}{AB} \frac{\partial B}{\partial \theta^1}$	$\frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \theta^2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^1} + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial \theta^1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \theta^1 \partial \theta^2}$
$\frac{K_1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \theta^2}$	$-\frac{1}{A} \frac{\partial K_2}{\partial \theta^1} - \frac{K_2}{A} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^1}$	$\frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \theta^2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^1} + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial \theta^1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \theta^1 \partial \theta^2}$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\mathbb{L}} \underline{U} ; K_1 = 1/R_1 ; K_2 = 1/R_2 -$$

Figura IV.3 - Operador de deformações generalizadas ($\underline{\mathbb{L}}$)

$$\underline{S} = \underline{D} \underline{\epsilon} \quad (\text{IV.78})$$

\underline{D} representado na Figura IV.4

Das definições introduzidas o trabalho virtual interno e, externo, expressões (III.21) e (III.26), podem ser expressos por:

$$\text{TVI}(\underline{\hat{U}}) = \iint_{\Sigma_m} \underline{\hat{\epsilon}}^T \underline{D} \underline{\epsilon} A B d\theta^1 d\theta^2 \quad (\text{IV.79})$$

sendo:

$$\underline{\epsilon} = \underline{L} \underline{U}$$

$$\underline{\hat{\epsilon}} = \underline{L} \underline{\hat{U}}$$

$\underline{\hat{U}}$: deslocamento virtual.

$$\begin{aligned} \text{TVE}(\underline{\hat{U}}) = & \iint_{\Sigma_m} \underline{f} \cdot \underline{\hat{U}} A B d\theta^1 d\theta^2 + \iint_{\partial\Sigma_m} \underline{f} \cdot \underline{\hat{U}} + \underline{\bar{m}}_n W_{,n} ds \\ & + \sum_i R_i W_i \end{aligned} \quad (\text{IV.80})$$

$$\begin{bmatrix}
 \Delta I_1 & \Delta v h & - & - & \Delta I_2 & - & - & - \\
 \Delta J_1 & - & - & - & \Delta J_2 & - & - & - \\
 & GJ_1 & Gh & - & - & GJ_2 & - & - \\
 & & GI_1 & - & - & - & GI_2 & - \\
 & & & \Delta I_3 & \frac{\Delta v h^3}{12} & - & - & - \\
 & & & & \Delta J_3 & - & - & - \\
 [\text{Sym.}] & & & & & GJ_3 & \frac{Gh^3}{12} & GI_3
 \end{bmatrix}$$

$h = h(X_0)$ - espessura da casca

$$\Delta = \frac{E}{(1 - \nu^2)}$$

$$\rho_1 = (1 - \xi/R_1)$$

$$\rho_2 = (1 - \xi/R_2)$$

$$G = \frac{1}{2} \left[\frac{E}{1 + \nu} \right]$$

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_2}{\rho_1} d\xi \quad I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \xi d\xi \quad I_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \xi^2 d\xi$$

$$J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_1}{\rho_2} d\xi \quad J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \xi d\xi \quad J_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \xi^2 d\xi$$

(Resultados das integrais - vide Apêndice B)

$$\underline{S} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$$

Figura IV.4 - Matriz constitutiva generalizada

CAPÍTULO V

SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PROBLEMA DE K-L.
O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

V.1. SOLUÇÃO APROXIMADA. GENERALIDADES

Seguindo os resultados do Capítulo III, o problema de K-L pode ser enunciado, em sua formulação tensorial, por:

Encontrar

$$(\underline{v}_{ot}, v_n) \in \text{Kin } \tilde{IV}_{KL}$$

Tal que:

$$\iint_{\Sigma_m} N_t \cdot \hat{E}_t + M_t \cdot \hat{X}_t \, d\Sigma_m = \text{PVE}(\underline{\hat{v}}_{ot}, \hat{v}_n) ; \forall (\underline{\hat{v}}_{ot}, \hat{v}_n) \in \text{Var } \tilde{IV}_{KL} \quad (V.1)$$

Sendo:

$$\hat{E}_t = e_t(\underline{\hat{v}}_{ot}, \hat{v}_n) = \pi(\nabla \underline{\hat{v}}_{ot} + \hat{v}_n \nabla n)$$

$$\hat{\chi}_t = \chi_t (\hat{v}_{ot}, \hat{v}_n) = \pi (\nabla \hat{v}_{ot} - \nabla \hat{v}_n)$$

e satisfazendo a relação constitutiva:

$$(N_t, M_t) = \mathbb{D} (\epsilon_t, \chi_t) \quad (V.2)$$

Os campos \hat{v}_{ot} e \hat{v}_n sendo definidos em espaços vetoriais de dimensão infinita (mônidos de produto interno) e nestes denotaremos respectivamente por:

$$\{ \hat{\phi}_n \}_{n=1}^{\infty} \text{ e } \{ \psi_m \}_{m=1}^{\infty}$$

possíveis bases.

Podemos portanto escrever:

$$\hat{v}_{ot} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \hat{\phi}_n ; \hat{v}_n = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{b}_m \psi_m \quad (V.3a \pm b)$$

Var \tilde{IV}_{KL} poderá ser representado por:

$$\text{Var } \tilde{IV}_{KL} = \{ (\hat{v}_{ot}, \hat{v}_n) \mid \hat{v}_{ot} \in \text{SPAN } \{ \hat{\phi}_n \}_{n=1}^{\infty} \wedge \hat{v}_n \in \text{SPAN } \{ \psi_m \}_{m=1}^{\infty} \} \quad (V.4)$$

elementos de $\text{Kin } \tilde{IV}_{KL}$ poderão também ser representados ante uma decomposição nestas bases lembrando-se que:

$$\text{Kin } \tilde{IV}_{KL} = (\hat{v}_{ot}, \hat{v}_n) + \text{Var } \tilde{IV}_{KL} ; (\hat{v}_{ot}, \hat{v}_n) \in \text{Kin } \tilde{IV}_{KL} \quad (V.5)$$

Interessados numa solução aproximada, podemos redenifir o problema restringindo-se a trabalhar com sub-espacos dos espa

ços vetoriais anteriores estes, entretanto, de dimensão finita.

Motivados na formulação do problema aproximado definimos os conjuntos:

$$\text{Var } \tilde{IV}_{KL}^{(N,M)} = \{(\tilde{v}_{ot}, \tilde{v}_n) \mid \tilde{v}_{ot} \in \text{SPAN } \{\phi_j\}_{j=1}^N \wedge \tilde{v}_n \in \text{SPAN } \{\psi_j\}_{j=1}^M\} \quad (V,6)$$

$$\text{Kin } \tilde{IV}_{KL}^{(N,M)} = (\tilde{v}_{ot}, \tilde{v}_n) + \text{Var } \tilde{IV}_{KL}^{(N,M)}$$

O problema aproximado podendo ser formulado por:

Encontrar

$$(\tilde{v}_{ot}, \tilde{v}_n) \in \text{Kin } \tilde{IV}_{KL}^{(N,M)}$$

tal que:

$$\begin{aligned} \forall (\tilde{v}_{ot}, \tilde{v}_n) \in \text{Var } \tilde{IV}_{KL}^{(N,M)} ; \iint_{\Sigma_m} N_t \cdot \hat{E}_t + M_t \cdot \hat{X}_t d\Sigma_m = \\ = \text{PVE } (\tilde{v}_{ot}, \tilde{v}_n) \end{aligned} \quad (V.8)$$

Sendo:

$$\hat{E}_t = e_t(\tilde{v}_{ot}, \tilde{v}_n) ; \hat{X}_t = x_t(\tilde{v}_{ot}, \tilde{v}_n)$$

$$(N_t, M_t) = \mathbb{D}(e_t(\tilde{v}_{ot}, \tilde{v}_n), x_t(\tilde{v}_{ot}, \tilde{v}_n))$$

Estando na realidade implícito o seguinte problema algébrico:

Encontrar:

$$(a_1, a_2, a_3 \dots a_N) \text{ e } (b_1, b_2, \dots b_M)$$

coeficientes das decomposições:

$$v_{ot} = \bar{v}_{ot} + \sum_{j=1}^N a_j \phi_j \text{ e } v_n = \bar{v}_n + \sum_{j=1}^M b_j \psi_j$$

onde:

$$(\bar{v}_{ot}, \bar{v}_n) \in \text{Kin } \tilde{W}_{KL}^{(N,M)}$$

Tal que:

$$\forall ((\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_N) ; (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_M))$$

$$(N_t, M_t) = \mathbb{D} (\epsilon (v_{ot}, v_n), \chi_t(v_{ot}, v_n))$$

$$\bar{v}_{ot} = \sum_{j=1}^N \hat{a}_j \phi_j \quad ; \quad \bar{v}_n = \sum_{j=1}^M \hat{b}_j \psi_j$$

$$\iint_{\Sigma_m} (N_t \cdot \epsilon_t (\bar{v}_{ot}, \bar{v}_n) + M_t \cdot \chi_t (\bar{v}_{ot}, \bar{v}_n)) d\Sigma_m = PVE (\bar{v}_{ot}, \bar{v}_n) \quad (V.9)$$

No desenvolvimento do problema aproximado, descrito a seguir, utilizou-se a técnica dos elementos finitos na obtenção das bases dos espaços vetoriais que constituem $\text{Var } \tilde{W}_{KL}^{(N,M)}$. Neste desenvolvimento abandonou-se a formulação tensorial sendo adotada a matricial, introduzida na seção (IV.8). A formulação

tensorial, apesar de ser conveniente na melhor compreensão das hipóteses adotadas, é sobremaneira algebricamente mais envolvente que a matricial, justificando portanto a decisão adotada. (Para a descrição tensorial do métodos dos elementos finitos refira a FEIJÓO, TAROCO (7)).

V.2. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF). O ELEMENTO DESENVOLVIDO

V.2.1. GENERALIDADES

Consiste o MEF em uma técnica de obtenção de funções de interpolação. Estas se caracterizam por possuir suportes compactos, sendo definidos sobre conjuntos de partições do domínio (elementos finitos) e assumindo valores nulos no exterior destes. As funções de interpolação possuindo suporte compacto fornecem aos sistemas algébricos resultantes diversas vantagens computacionais. Para uma melhor descrição do método, refira-se aos trabalhos de BATHE, WILSON (16) e ZIENKIEWICZ (17). No presente trabalho limitaremos a fornecer os resultados da discretização utilizada.

V.2.2. PARTIÇÃO DO DOMÍNIO - FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Na obtenção das bases de interpolação pelo MEF particiona-se o domínio (Σ_m) em elementos finitos (Σ_m^e ; $e = 1, K$). Também sobre o domínio (Σ_m) definimos nós globais (X^Δ ; $\Delta = 1, G$) e correspondentes a estes, nós elementares definidos em (Σ_m^e). Os nós elementares associam-se aos nós globais através de uma trans

formação ao qual denominamos de incidência.

Na construção das bases dos espaços vetoriais, pela técnica dos elementos finitos (EF), estas resultam ser de suporte compacto e são definidas de forma a apresentarem a mesma regularidade que os espaços vetoriais ao qual aproximam, garantindo portanto a convergência do método.

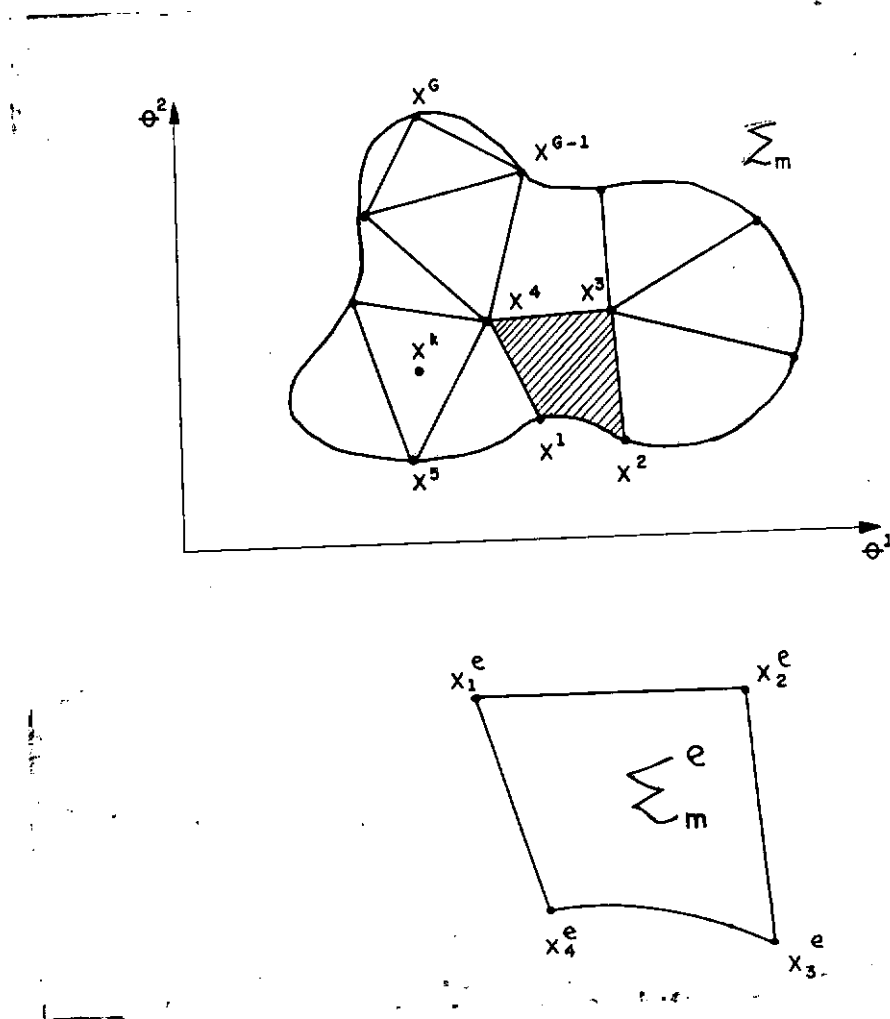


Figura V.1 - Partição do domínio nós globais/elementares

Para os espaços vetoriais interpolados segue-se:

Seja:

$$\underline{v}_{ot} = \sum_{\alpha=1}^2 v_{ot<\alpha>} \underline{a}_{<\alpha>}$$

Seguindo as notações introduzidas em (IV.23), têm-se

$$U = v_{ot<1>} \quad V = v_{ot<2>} \quad W = v_n$$

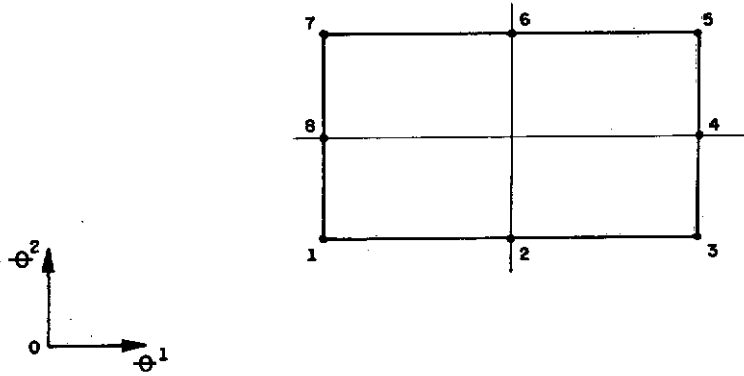
$\{\underline{a}_{<\alpha>}; \alpha = 1, 2\}$ sendo a base física adotada para os planos tangentes à superfície média e dependendo que das direções principais de curvatura. Poderemos portanto reformular o problema aproximado (V.8-9) agora, entretanto, em termos das componentes (U, V, W) pertencentes a espaços vetoriais reais definidos em (Σ_m) . Bases para estes espaços, através do MEF, sendo funções reais de suporte compacto.

Computacionalmente, estas bases não são efetivamente calculadas. Trabalha-se a nível elementar (Σ_m^e) e, em alguns casos, mapeia-se estes elementos sobre um domínio de referência (elemento de referência). A grande vantagem de se trabalhar com o domínio de referência está, em parte, na seleção das funções interpolantes, muitas destas fornecidas na literatura especializada.

Neste presente trabalho o domínio foi discretizado seguindo-se às direções principais de curvatura definindo elementos retangulares e 8 nós e 32 graus de liberdade.

Na obtenção das funções de interpolação referiu-se, os elementos, a um domínio padrão sendo aplicada a transformação de coordenadas:

$$\theta^1(\xi, \eta) = \bar{\theta}^1(\xi) = \omega_1(\xi) \theta_1^1 + \omega_2(\xi) \theta_2^1 \quad (V.10a)$$



nós : 1, 3, 5, 7 ; graus de liberdade: $U, V, W, \frac{\partial W}{\partial \theta^1}, \frac{\partial W}{\partial \theta^2},$
 $\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^1 \partial \theta^2}$

nós : 2, 4, 6, 8 ; graus de liberdade: U, V

Figura V.2 - Elemento finito utilizado

$$\theta^2 (\xi, \eta) = \bar{\theta}^2 (\eta) = \omega_1 (\eta) \theta_1^1 + \omega_2 (\eta) \theta_2^1 \quad (V.10b)$$

sendo:

- (θ_1^1, θ_2^1) e (θ_1^2, θ_2^2) : coordenadas nodais elementares (vide Fig. V.3)

- $\omega_1 (s)$; $\omega_2 (s)$: polinômios de Lagrange lineares definidos por:

$$\omega_1 (s) = \frac{1 - s}{2}, \quad \omega_2 (s) = \frac{1 + s}{2} ; s \in [-1, 1]$$

A matriz Jacobiana da transformação de coordenadas, segundo TOUZHOT e DAHL (19), podendo ser calculada por:

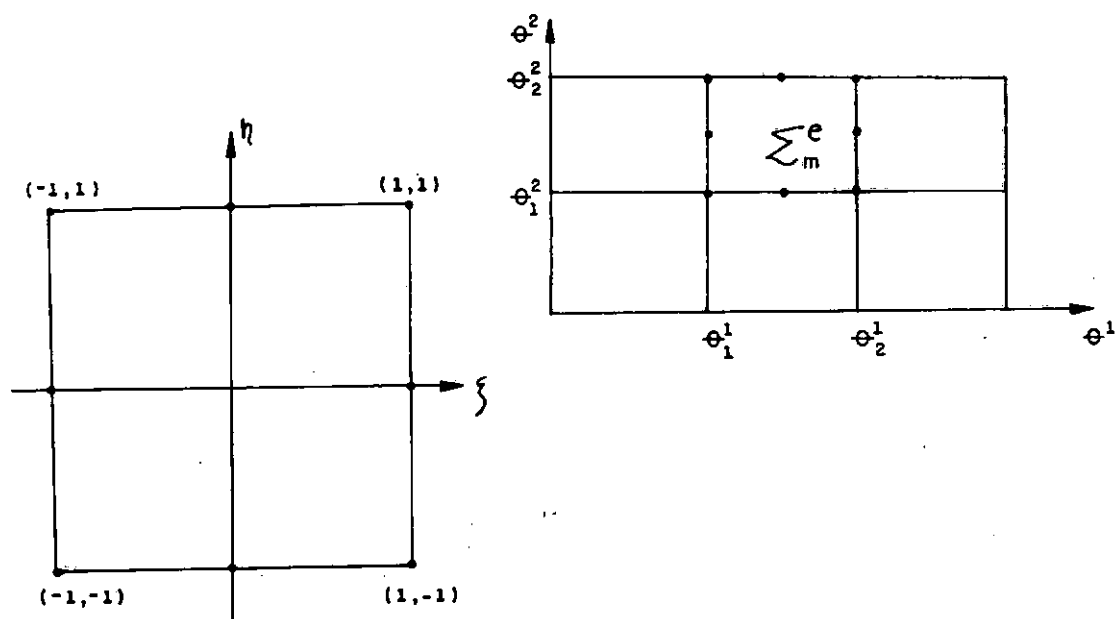


Figura V.3 - Elemento de referência/Discretização utilizada

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta^1}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta^2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta^1}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta^2}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\Delta \theta^1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta \theta^2}{2} \end{vmatrix}$$

$$\det J = \frac{\Delta \theta^1 \Delta \theta^2}{4}$$

sendo:

$$\Delta \theta^1 = \theta_2^1 - \theta_1^1$$

$$\Delta \theta^2 = \theta_2^2 - \theta_1^2$$

Para se garantir a convergência do MEF aplicado ao problema de K-L têm-se como necessário (IV.77-79):

$$U, V \in C^0$$

$$W \in C^1$$

Na seleção das funções de interpolação, adotou-se polinômio quadráticos incompletos (classe C^0) para os deslocamentos longitudinais (U, V) e para o transversal (W), interpolação através de polinômios de Hermite (classe C^1). Os polinômios de interpolação utilizados, descritos em termos do domínio de referência, são fornecidos na Figura (V.4-5).

A interpolação elementar, sobre o domínio de referência, pode portanto ser representada por:

$$U = \sum_{i=1}^8 U_i \psi_i(\xi, \eta) \quad (V.12a)$$

$$V = \sum_{i=1}^8 V_i \psi_i(\xi, \eta) \quad (V.12b)$$

$$W = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 b_{ij} \Phi_i(\xi) \Phi_j(\eta) \quad (V.12c)$$

sendo:

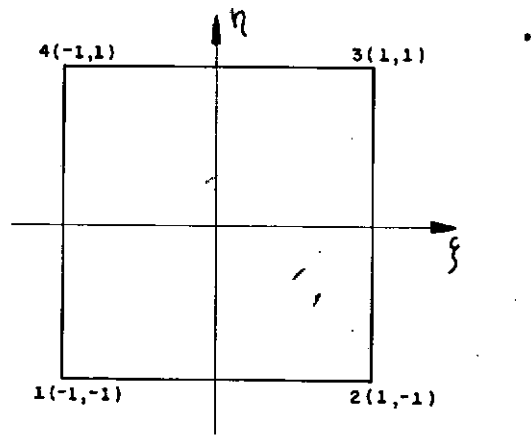
$$\xi \in [-1, 1] ; \eta \in [-1, 1]$$

U_i : deslocamento longitudinal (direção θ^1) do i -ésimo nã elementar

V_i : deslocamento longitudinal (direção θ^2) do i -ésimo nã elementar

$\psi_i(\xi, \eta)$: polinômios quadráticos incompletos (classe C^0) (vide Fig. V.5)

$b_{ij} \Phi_i(\xi) \Phi_j(\eta)$: interpolação por polinômios de Hermite (vide Fig. V.4)



Domínio de referência: $[-1, 1] \times [-1, 1]$

Graus de liberdade nodais: $\{(w^i, \frac{\partial w^i}{\partial \xi}, \frac{\partial w^i}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 w^i}{\partial \xi \partial \eta}), i = 1, 4\}$

Graus de liberdade nodais (nº i)	Polinômios interpolantes [Φ_i : Polinômios de Hermite]			
	nº 1	nº 2	nº 3	nº 4
w^i	$\Phi_1(\xi) \Phi_1(\eta)$	$\Phi_3(\xi) \Phi_4(\eta)$	$\Phi_3(\xi) \Phi_3(\eta)$	$\Phi_1(\xi) \Phi_3(\eta)$
$\frac{\partial w^i}{\partial \xi}$	$\Phi_2(\xi) \Phi_1(\eta)$	$\Phi_4(\xi) \Phi_1(\eta)$	$\Phi_4(\xi) \Phi_3(\eta)$	$\Phi_2(\xi) \Phi_3(\eta)$
$\frac{\partial w^i}{\partial \eta}$	$\Phi_1(\xi) \Phi_2(\eta)$	$\Phi_3(\xi) \Phi_2(\eta)$	$\Phi_3(\xi) \Phi_4(\eta)$	$\Phi_1(\xi) \Phi_4(\eta)$
$\frac{\partial^2 w^i}{\partial \xi \partial \eta}$	$\Phi_2(\xi) \Phi_2(\eta)$	$\Phi_4(\xi) \Phi_2(\eta)$	$\Phi_4(\xi) \Phi_4(\eta)$	$\Phi_2(\xi) \Phi_4(\eta)$

Polinômios de Hermite:

$$\Phi_1(s) = (1 - s)^2 (2 + s)/4$$

$$\Phi_2(s) = (1 - s)^2 (1 + s)/4$$

$$\Phi_3(s) = (1 + s)^2 (2 - s)/4$$

$$\Phi_4(s) = (s^2 - 1) (1 + s)/4$$

Figura V.4 - Interpolação por polinômios de Hermite (classe C^1). Ref.: DHATT e TOUZOT (19)

(i) Polinômios serendípticos (quadráticos incompletos)

$$\psi_1 (\xi, \eta) = (\xi - 1) (1 - \eta) (1 + \xi + \eta)/4$$

$$\psi_2 (\xi, \eta) = (1 - \xi^2) (1 - \eta)/2$$

$$\psi_3 (\xi, \eta) = (1 + \xi) (\eta - 1) (1 - \xi + \eta)/4$$

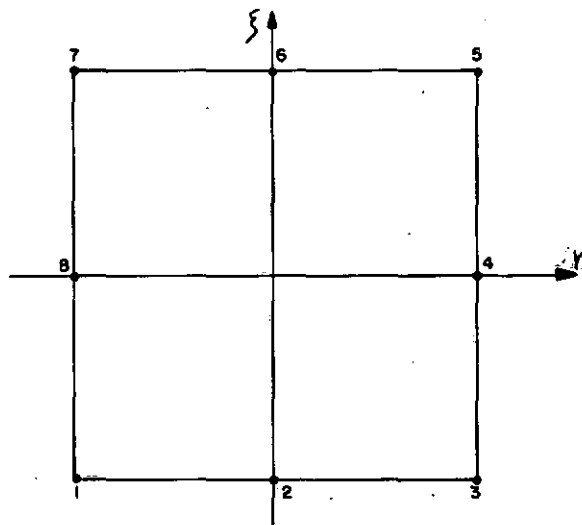
$$\psi_4 (\xi, \eta) = (1 + \xi) (1 - \eta^2)/2$$

$$\psi_5 (\xi, \eta) = (1 + \xi) (1 + \eta) (\xi + \eta - 1)/4$$

$$\psi_6 (\xi, \eta) = (1 - \xi^2) (1 + \eta)/2$$

$$\psi_7 (\xi, \eta) = (\xi - 1) (1 + \eta) (1 + \xi - \eta)/4$$

$$\psi_8 (\xi, \eta) = (1 - \xi) (1 - \eta^2)/2$$



Domínio de referência: $[-1, 1] \times [-1, 1]$

Graus de liberdade nodais: $\{(U^i, V^i); i = 1, 8\}$

Figura V.5 - Interpolação dos deslocamentos longitudinais
Ref.: DAHTT e TOUZOT (19)

Definindo-se:

(i)

$$\underline{U}_{(e)}^T = \{U, V, W\} \quad ; \text{ vetor de deslocamento, elementar} \quad (V.13)$$

(ii)

$$\underline{q}_{(e)}^T = \left[U^1, V^1, W^1, \frac{\partial W^1}{\partial \theta^1}, \frac{\partial W^1}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 W^1}{\partial \theta^1 \partial \theta^2}, \dots, \right. \\ \left. U^4, V^4, W^4, \frac{\partial W^4}{\partial \theta^1}, \frac{\partial W^4}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 W^4}{\partial \theta^1 \partial \theta^2} \right] \quad (V.14)$$

$\underline{q}_{(e)}$: vetor de graus de liberdade elementar (32 G.L.); e-ésimo elemento

Podemos representar matricialmente (V.12a-c) por:

$$\underline{U}_{(e)}(\xi, \eta) = \underline{N}(\xi, \eta) \underline{q}_{(e)} \quad ; \quad \xi \in [-1, 1], \eta \in [-1, 1] \quad (V.15)$$

Sendo utilizada as relações:

$$\frac{\partial W}{\partial \theta^1} = \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta^1} = \frac{2}{\Delta \theta^1} \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (V.16a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta^2} = \frac{2}{\Delta \theta^2} \frac{\partial W}{\partial \eta} \quad (V.16b)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^1 \partial \theta^2} = \frac{4}{\Delta \theta^1 \Delta \theta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \quad (V.16c)$$

Denominamos $\underline{N}(\xi, \eta)$: matriz de interpolação elementar.

Os deslocamentos a nível global podem ser obtidos através das incidências nodais elementares.

Aplicando-se a matriz de interpolação à formulação matricial (IV.79-80) obtemos a formulação do problema de K-L ante a aproximação por elementos finitos adotada. As bases para os espaços vetoriais (funções de interpolação) estando implícitas na matriz \mathbb{N} e o vetor $\underline{q}_{(e)}$ fornecendo os deslocamentos e suas derivadas nodais elementares.

V.2.3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE K-L ANTE APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser expresso matricialmente seguindo, os resultados da seção IV.8:

Encontrar $\underline{U} \in \text{Kin } \tilde{\mathbb{U}}_{KL}^{(N,M)}$ tal que

$\forall \underline{\hat{U}} \in \text{Var } \tilde{\mathbb{U}}_{KL}^{(N,M)}$

$$\iint_{\Omega_m} \underline{\hat{\epsilon}}^T \mathbb{D} \underline{\epsilon} \, AB \, d\theta^1 \, d\theta^2 = \iint_{\Omega_m} \underline{\hat{f}}^T \cdot \underline{\hat{U}} \, AB \, d\theta^1 \, d\theta^2 \quad (\text{V.17})$$

Sendo sómente considerado o trabalho virtual externo das forças de volume e onde:

$$\underline{\epsilon} = \mathbb{L} \underline{U}$$

\mathbb{L} : operador de deformações definido em (IV.77)

$$\underline{\hat{f}}^T = \{f_1, f_2, f_3\}$$

\underline{f} : vetor de solicitações (IV.74)

De (V.15), segue-se:

$$\underline{U}_{(e)}(\xi, \eta) = \underline{N}(\xi, \eta) \underline{q}_{(e)}$$

ã matriz:

$$\underline{B}(\xi, \eta) = \underline{L} \underline{N}(\xi, \eta)$$

denominamos matriz de deformações generalizadas.

O trabalho virtual interno podendo ser expresso por:

$$\iint_{\Omega_m} \underline{\varepsilon}^T \underline{D} \underline{\varepsilon} \underline{A} \underline{B} \, d\theta^1 \, d\theta^2 = \sum_{e=1}^{N^e} \hat{\underline{q}}_{(e)}^T \left\{ \iint_R \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{A} \underline{B} \det J \, d\xi \, d\eta \right\} \underline{q}_{(e)} \quad (V.18)$$

R : domínio de referência: $[-1, 1] \times [-1, 1]$

N^e : número de elementos finitos

$\underline{q}_{(e)}$: vetor de G.L.; é-ésimo elemento

A matriz:

$$\iint_R \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{A} \underline{B} \det J \, d\xi \, d\eta = \underline{K}^{(e)} \quad (V.19)$$

denominamos matriz de rigidez elementar.

A potência externa elementar pode ser expressa por:

$$\iint_{\Sigma_m} \underline{f}^T \underline{u} \underline{A} \underline{B} \, d\theta^1 \, d\theta^2 = \hat{\underline{q}}_{(e)} \left\{ \iint_R \underline{N}^T(\xi, \eta) \underline{f} \underline{A} \underline{B} \det J \, d\xi \, d\eta \right\} \quad (V.20)$$

Ao vetor

$$\mathbb{F}^{(e)} = \left\{ \iiint_R \mathbb{N}^T(\xi, \eta) \underline{f}_{(e)} AB \det J d\xi d\eta \right\} \quad (V.21)$$

denominamos de vetor de solicitações elementares.

O PTV simplifica-se por:

$$\sum_{e=1}^{N^e} \hat{q}_{(e)}^T [\mathbb{K}^{(e)} q_{(e)} - \mathbb{F}^{(e)}] = 0 \quad (V.22)$$

denominando-se:

- q : vetor de graus de liberdades globais

- $\Lambda^{(e)} : q_{(e)} \rightarrow q$: matriz de conectividade relacionando G.L. elementares com G.L. globais

sendo:

NGLE : número de graus de liberdades elementares (32)

NGL : número de graus de liberdades globais (número de equações)

Definimos:

$\Lambda^{(e)}$ matriz (NGLE x NGL)

tal que:

$$\Lambda^{(e)}_{i \quad j} = \begin{cases} 1; & \text{se grau de liberdade elementar } i = \text{grau de liberdade global } j \\ 0; & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Poderemos análogamente definir a relação:

$$\begin{matrix} (e) \\ \Omega \end{matrix} : \underline{q} \rightarrow q_{(e)}$$

$$\begin{matrix} (e) \\ \Omega \end{matrix} \text{ matriz (NGL x NGLE)}$$

tal que:

$$\begin{matrix} (e) \\ \Omega \end{matrix} i_{\Delta} = \begin{cases} 1 & \text{se grau de liberdade global } \Delta \equiv \text{G.L. elementar } i \\ 0 & \text{se graus de liberdade distintos} \end{cases}$$

tem-se:

$$q_{(e)} = \begin{matrix} (e) \\ \Omega \end{matrix} \underline{q} \quad (V.23)$$

Portanto, o PTV reduz-se finalmente a:

$$\hat{\underline{q}}^T \sum_{e=1}^{N^e} \left[\begin{matrix} (e)T \\ \Omega \end{matrix} (K^{(e)} \begin{matrix} (e) \\ \Omega \end{matrix} \underline{q} - F^{(e)}) \right] = 0, \forall \hat{\underline{q}} \quad (V.24)$$

$\hat{\underline{q}}$: vetor de graus de liberdade virtuais

O PTV expresso por (V.24) equivale a resolver o sistema de equações algébricas (NGL equações): $K \underline{\hat{q}} = F$

$$K_{(NGL, NGL)} : \text{matriz de rigidez global}; K = \sum_{e=1}^{N^e} \begin{matrix} (e)T \\ \Omega \end{matrix} K^{(e)} \begin{matrix} (e) \\ \Omega \end{matrix}$$

$$F_{(NGL)} : \text{vetor de solicitações globais}; F = \sum_{e=1}^{N^e} \begin{matrix} (e)T \\ \Omega \end{matrix} F^{(e)}$$

A solução do sistema algébrico nos fornecerá os valores

dos deslocamentos, deformações e tensões generalizadas. Uma implementação para cascas genéricas foi realizada. Fornecendo-se as propriedades geométricas das superfícies médias, as matrizes de rigidez e os vetores de solicitações elementares podem ser calculados e montados nos correspondentes globais (conectividades). Diversos resultados foram obtidos para várias superfícies, sendo descritos no capítulo subsequente.

As integrais $\mathbb{K}^{(e)}$ e $\mathbb{F}^{(e)}$ foram obtidas por integração numérica pelo método de Gauss. O número de pontos de integração sendo determinado pela integração numérica exata das componentes de $\mathbb{K}^{(e)}$ e $\mathbb{F}^{(e)}$ (variando para cada superfície). (3x3) pontos de integração resultou nos casos analisados suficientes para a convergência independente de estarmos integrando exatamente ou não.

CAPÍTULO VI

TESTES DE DESEMPENHO DO ELEMENTO

VI.1. GENERALIDADES

Desenvolve-se, neste capítulo, testes de desempenho do elemento proposto. Basicamente tentamos identificar as seguintes características:

- convergência das soluções numéricas aos resultados analíticos com o refinamento da discretização por elementos finitos;
- rapidez na convergência.

A implementação do elemento abrange cascas genéricas, restringe-se aos casos em que se possa parametrizar a superfície média através das direções principais de curvatura.

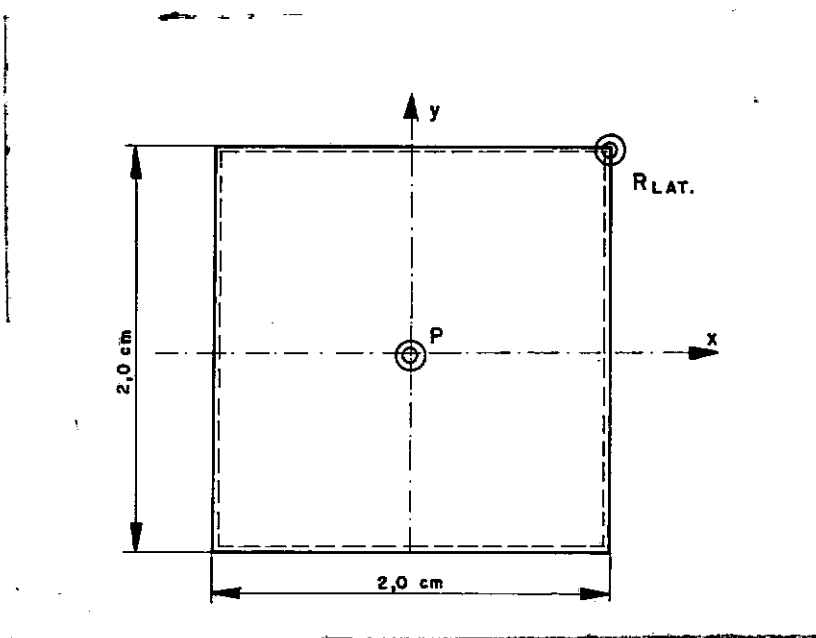
Analizamos problemas estáticos sob pequenas deformações e deslocamentos. Testes foram desenvolvidos para os seguintes casos:

- placas retangulares
- placas circulares
- cascas cilíndricas
- cascas esféricas
- cascas toroidais

Os resultados são descritos na seção seguinte.

VI.2. PROBLEMAS DESENVOLVIDOS

VI.2.1. PLACA RETANGULAR SIMPLESMENTE APOIADA. CARREGAMENTO CONCENTRADO CENTRAL



Propriedades:

carregamento central (P) = 4,0 Kgf

módulo de Young = 10,000 Kgf/cm²

coeficiente de Poisson = 0,3

espessura = 0,1 cm

Figura VI.1 - Placa simplesmente apoiada

Tabela VI.1 - Deslocamento máximo e reação lateral.
Resultados numéricos

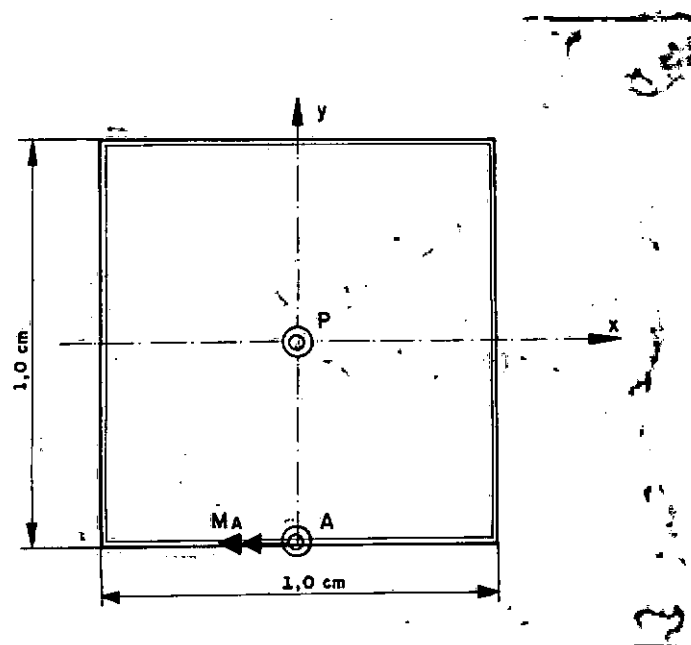
Malha	W_{MAX} (erro%)	R_{LAT} (erro%)
1x1	$9,2168 \times 10^{-2}$ (4,5%)	-
2x2	$9,5451 \times 10^{-2}$ (1,1%)	0,4907 (0,6%)
4x4	$9,6254 \times 10^{-2}$ ($2,7 \times 10^{-1}\%$)	0,4876 (-)
8x8	$9,6453 \times 10^{-2}$ ($6,1 \times 10^{-2}\%$)	0,4876 (-)

Resultados analíticos: TIMOSHENKO, WOINOWSKY-KRIEGER
(20)

$$W_{MAX} = 9,6512 \times 10^{-2} \text{ cm (deslocamento central)}$$

$$R_{LAT} = 0,4876 \text{ Kgf (reação lateral)}$$

VI.2.2. PLACA ENGASTADA. CARREGAMENTO CONCENTRADO CENTRAL



Propriedades:

carregamento central (P) = 4,0 Kgf

módulo de Young = 10,00 Kgf/cm²

coeficiente de Poisson = 0,3

espessura = 0,1 cm

Figura VI.2 - Placa retangular engastada

Tabela VI.2 - Deslocamento máximo e momento lateral (M_A). Resultados numéricos

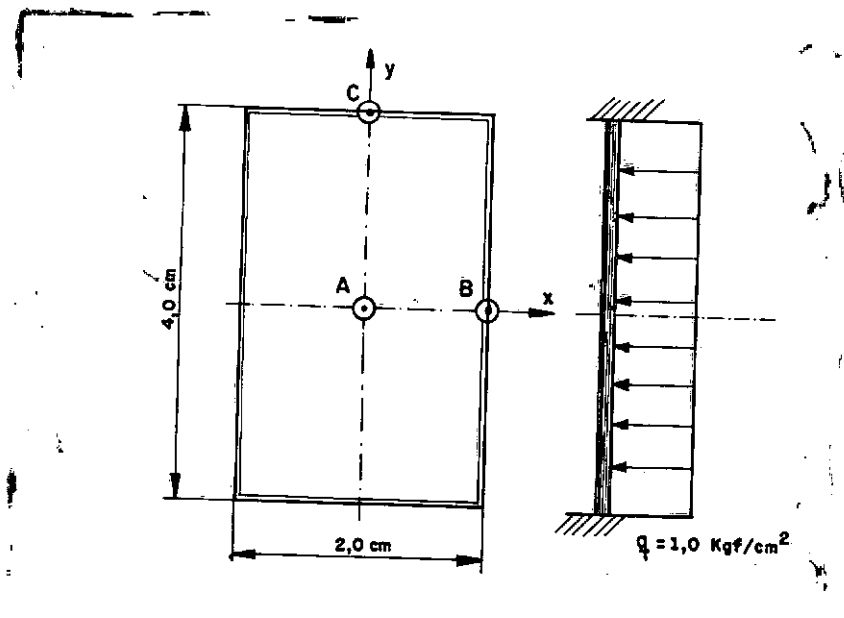
Malhas	W_{MAX} (erro%)	M_A (erro%)
1x1	$9,2584 \times 10^{-2}$ (5,4%)	-
2x2	$9,5842 \times 10^{-2}$ (2,0%)	0,4604 (8,4%)
4x4	$9,7489 \times 10^{-2}$ ($3,6 \times 10^{-1}\%$)	0,4843 (3,7%)
8x8	$9,7914 \times 10^{-2}$ ($7,2 \times 10^{-2}\%$)	0,4973 (1,1%)

Resultados analíticos: TIMOSHENKO, W.-KRIEGER (20):

$$W_{MAX} = 9,7843 \times 10^{-2} \text{ cm (deslocamento central)}$$

$$M_A = 0,5028 \text{ Kgf} \cdot \text{cm/cm (momento } M_{yy} \text{ em A)}$$

VI.2.3. PLACA RETANGULAR ENGASTADA. CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO CONSTANTE



Propriedades:

módulo de Young = $21.000,0 \text{ Kgf/cm}^2$

coeficiente de Poisson = 0,3

espessura = 0,1 cm

Figura VI.3 - Placa retangular sob carregamento distribuído constante

Resultados numéricos: (em parênteses, módulo do erro (%)):

(i) malha (1x1)

$$W_{\text{MAX}} = 2,391 \times 10^{-2} \text{ (13,1\%)}$$

(ii) malha (2x2)

$$W_{MAX} = 2,1015 \times 10^{-2} \quad (0,56\%)$$

$$M_X(A) = 1,828 \times 10^{-1} \quad (10,9\%)$$

$$M_Y(A) = 6,573 \times 10^{-2} \quad (4,0\%)$$

$$M_X(B) = - 0,3069 \quad (7,42\%)$$

$$M_Y(C) = - 0,1402 \quad (38,6\%)$$

(iii) malha (4x4)

$$W_{MAX} = 2,1069 \times 10^{-2} \quad (0,3\%)$$

$$M_X(A) = 1,690 \times 10^{-1} \quad (2,6\%)$$

$$M_Y(A) = 6,351 \times 10^{-2} \quad (0,5\%)$$

$$M_X(B) = - 0,3253 \quad (1,8\%)$$

$$M_Y(C) = - 0,1935 \quad (15\%)$$

(iv) malha (8x8)

$$W_{MAX} = 2,1074 \times 10^{-2} \quad (0,278\%)$$

$$M_X(A) = 1,657 \times 10^{-1} \quad (2,3\%)$$

$$M_Y(A) = 6,329 \times 10^{-2} \quad (0,1\%)$$

$$M_X(B) = - 0,3299 \quad (0,5\%)$$

$$M_Y(C) = - 0,2172 \quad (4,9\%)$$

Resultados analíticos: TIMOSHENKO, W.-KRIEGER (20):

$$W_{MAX} = 2,11328 \times 10^{-2} \text{ cm (deslocamento transversal central)}$$

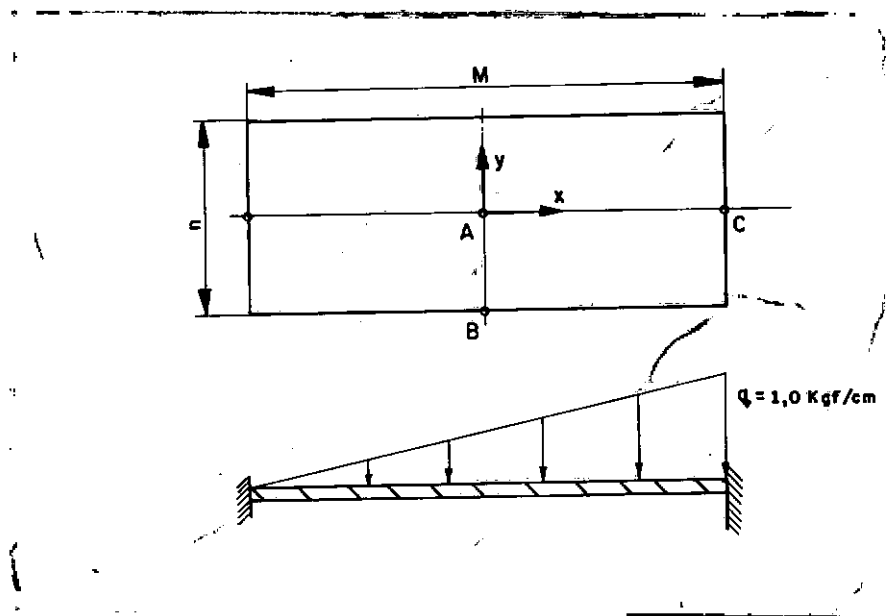
$$M_X(A) = 0,1648 \text{ Kgf} \cdot \text{cm/cm}$$

$$M_Y(A) = 0,0637 \text{ "}$$

$$M_X(B) = - 0,3316 \text{ "}$$

$$M_Y(C) = - 0,2284 \text{ "}$$

VI.2.4. PLACA RETANGULAR ENGASTADA. CARREGAMENTO HIDROSTÁTICO



Propriedades:

módulo Young = $21,000 \text{ Kgf/cm}^2$

coeficiente de Poisson = $0,3$

espessura = $0,1 \text{ cm}$

Figura VI.4 - Placa retangular. Carregamento hidrostático

VI.2.4.1. RELAÇÃO DE ASPECTO ($m/n = 1,0$; $n = 1,0$ cm)

Resultados numéricos (módulo do erro (%)) entre parênteses):

(i) malha (2x2)

$$\begin{aligned} W_A &= 5,3866 \times 10^{-3} \quad (2,8\%) \\ M_X(A) &= 5,2706 \times 10^{-2} \quad (14,0\%) \\ M_X(C) &= - 6,9938 \times 10^{-2} \quad (48,0\%) \\ M_X(D) &= - 5,4368 \times 10^{-2} \quad (24,0\%) \\ M_Y(B) &= - 9,0550 \times 10^{-2} \quad (11,9\%) \end{aligned}$$

(ii) malha (4x4)

$$\begin{aligned} W_A &= 5,2627 \times 10^{-3} \quad (0,4\%) \\ M_X(A) &= 4,7058 \times 10^{-2} \quad (2,3\%) \\ M_X(C) &= - 1,0911 \times 10^{-1} \quad (18,3\%) \\ M_X(D) &= - 6,4795 \times 10^{-2} \quad (9,5\%) \\ M_Y(B) &= - 0,7785 \times 10^{-2} \quad (4,8\%) \end{aligned}$$

(iii) malha (8x8)

$$\begin{aligned} W_A &= 5,2635 \times 10^{-3} \quad (0,4\%) \\ M_X(A) &= 4,6121 \times 10^{-2} \quad (0,26\%) \\ M_X(C) &= - 1,2626 \times 10^{-1} \quad (5,5\%) \\ M_X(D) &= - 6,9402 \times 10^{-2} \quad (3,0\%) \\ M_Y(B) &= - 1,0133 \times 10^{-1} \quad (1,4\%) \end{aligned}$$

Resultados analíticos YOUNG (24):

$$\begin{aligned} W_A &= 5,2416 \times 10^{-3} \text{ cm (deslocamento central)} \\ M_X(A) &= 4,600 \times 10^{-2} \text{ Kgf} \cdot \text{cm/cm} \\ M_X(C) &= - 1,3360 \times 10^{-1} \quad " \\ M_X(D) &= - 7,1600 \times 10^{-2} \quad " \\ M_Y(B) &= - 1,028 \times 10^{-1} \quad " \end{aligned}$$

VI.2.4.2. RELAÇÃO DE ASPECTO ($n/m = 1,5$; $n = 2,0$ cm)

Resultados numéricos (módulo do erro (%) em parênteses):

(i) malha (8x8)

$$W(A) = 1,8049 \times 10^{-3} \quad (0,16\%)$$

$$M_X(A) = 3,3399 \times 10^{-2} \quad (7,4\%)$$

$$M_Y(A) = 1,8205 \times 10^{-2} \quad (5,6\%)$$

$$M_X(C) = - 7,9277 \times 10^{-2} \quad (1,5\%)$$

$$M_X(D) = - 5,1876 \times 10^{-2} \quad (2,3\%)$$

$$M_Y(B) = - 4,9281 \times 10^{-2} \quad (2,3\%)$$

Resultados analíticos YOUNG (24):

$$W(A) = 1,8078 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

$$M_X(A) = 3,1096 \times 10^{-2} \text{ Kgf} \cdot \text{cm/cm}$$

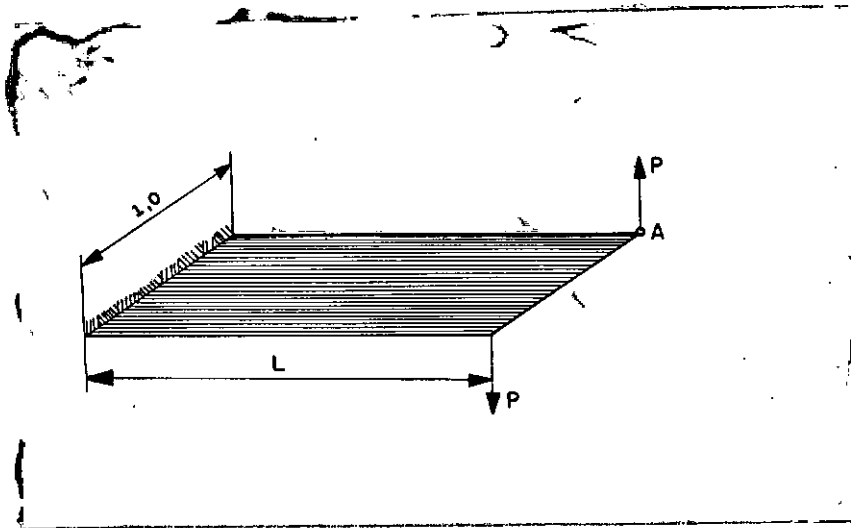
$$M_Y(A) = 1,7238 \times 10^{-2} \quad "$$

$$M_X(C) = - 7,8078 \times 10^{-2} \quad "$$

$$M_X(D) = - 4,9855 \times 10^{-2} \quad "$$

$$M_Y(B) = - 4,8165 \times 10^{-2} \quad "$$

VI.2.5. PLACA RETANGULAR SOB CARREGAMENTO DIFERENCIAL



Propriedades:

módulo de Young = $10^7 \cdot \text{lb}_f/\text{in}^2$

coeficiente de Poisson = 0,25

espessura = 0,05 in

$P = 1,0 \text{ lb}_f$

Figura VI.5 - Placa retangular sob carregamento diferencial

Resultados numéricos (malha 1x1): veja Gráfico VI.1

TORÇÃO SOB CARREGAMENTO DIFERENCIAL

"REF.: ROBINSON, HAGGENMACHER (26)"

(-) STRAP (16 ELEMENTOS)

(*) MALHA (1X1)

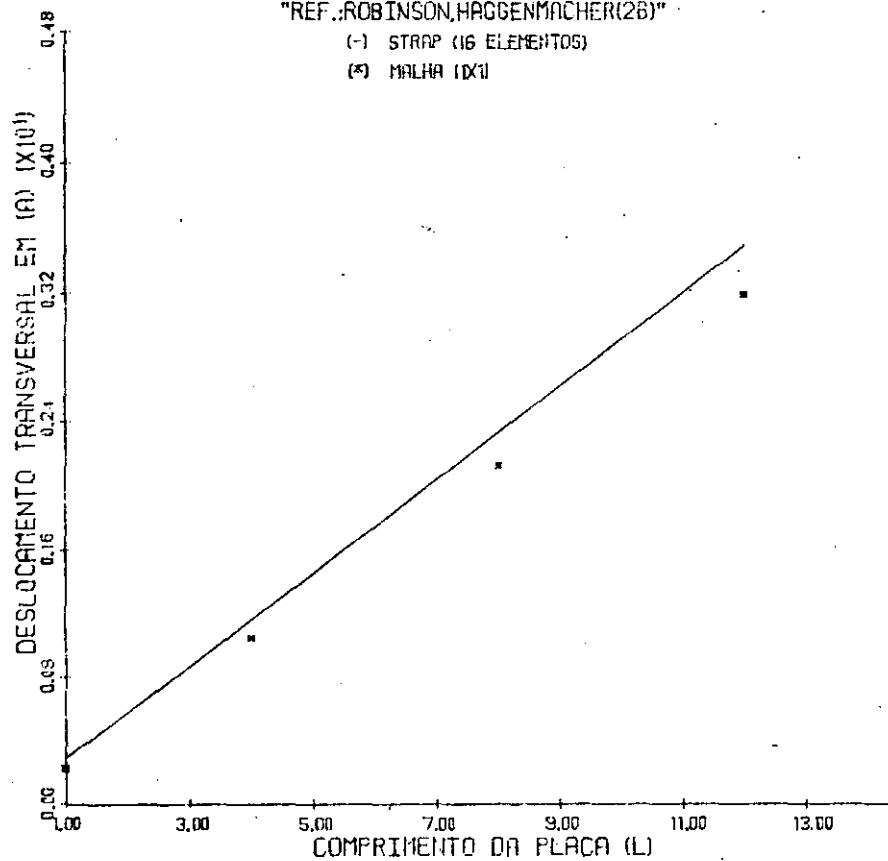
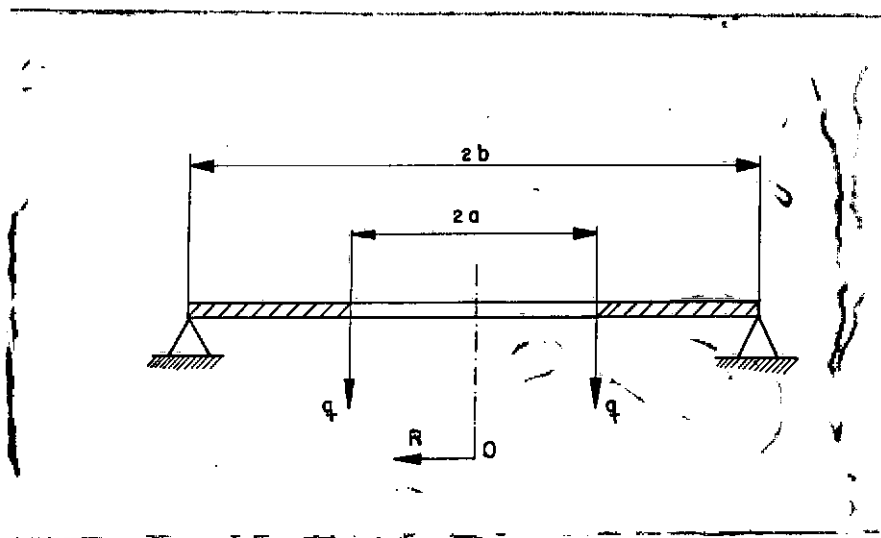


Gráfico VI.1 - Comportamento do elemento quanto à torção (carregamento diferencial).
Comprimento da placa (L) x deslocamento transversal em (A)

(*) Ref.: ROBINSON, HAGGENMACHER (26)

**VI.2.6. PLACA CIRCULAR COM ORIFÍCIO. APOIO SIMPLES.
SOLICITAÇÃO DISTRIBUÍDA CONSTANTE NO BORDO LIVRE**



Propriedades:

módulo de Young: $= 21,000 \text{ Kgf/cm}^2$

coeficiente de Poisson $= 0,3$

espessura $(H) = 0,25 \text{ cm}$

raio externo $(b) = 20,0 \text{ cm}$

raio interno $(a) = 10,0 \text{ cm}$

carregamento distribuído $(q) = 6/\pi \text{ Kgf/cm}$

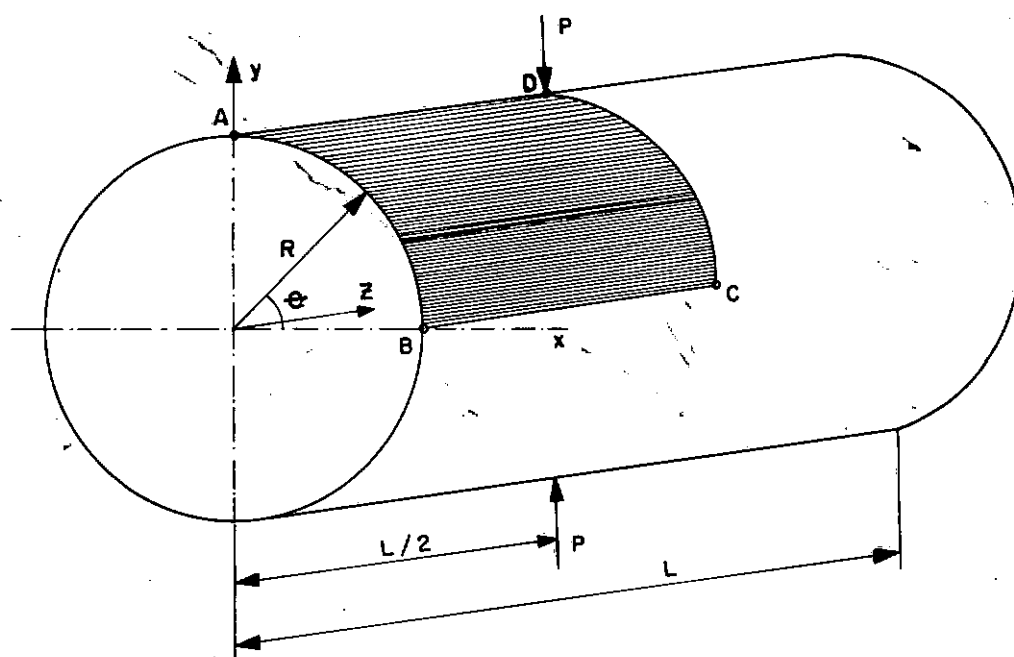
Resultados analíticos: TIMOSHENKO, W.-KRIEGER (20).

Resultados numéricos:

malha (1×10) ; $(0 \leq \theta \leq 6^\circ; 10 \leq R \leq 20 \text{ cm})$:

Veja Gráficos VI.2-3.

VI.2.7. CILINDRO SOB CARREGAMENTO CONCENTRADO ("PINCHED CYLINDER")



$$L = 10,35 \text{ in}$$

$$R = 4,953 \text{ in}$$

Figura VI.7 - Casca cilíndrica sob carregamento concentrado

VI.2.7.1. CILINDRO ESPESSO

Propriedades:

$$\text{módulo de Young} = 10,5 \times 10^6 \text{ lb}_f \cdot \text{in}^{-2}$$

$$\text{coeficiente de Poisson} = 0,3125$$

espessura = 0,094 in

$$P = 100.1b_f$$

Resultado analítico*:

(CANTIN, G.): $W(D) = 0,1139$ in

(*) Referência: ASHWELL (27)

Resultados numéricos:

Tabela VI.3 - Deslocamento transversal $W(\text{in})$ sob a solicitação concentrada e erro (%).
Resultados numéricos

Malha (1/8 cilindro)*	$W(D)$	Erro
1x4 (55 G.L.)	$4,3008 \times 10^{-2}$	62,2%
4x4 (175 G.L.)	$4,4307 \times 10^{-2}$	61,1%
8x8 (671 G.L.)	$1,0175 \times 10^{-1}$	10,7%
3x20 (679 G.L.)	$1,1270 \times 10^{-1}$	1,05%
3x30 (1019 G.L.)	$1,1297 \times 10^{-1}$	0,81%

(*) malha $a \times b$ (1/8 cilindro):

$(0,0 \leq Z \leq 5,175 \text{ in} ; 0 \leq \theta \leq 90^\circ)$, elementos iguais

VI.2.7.2. CILINDRO DELGADO

Propriedades:

módulo de Young = $10,5 \times 10^6 \text{ lb}_f \cdot \text{in}^{-2}$

coeficiente de Poisson = 0,3125

espessura = 0,01548 in

P = 0,1 lb_f

Resultado analítico*:

(CANTIN, G.): $W(D) = 0,02439 \text{ in}$

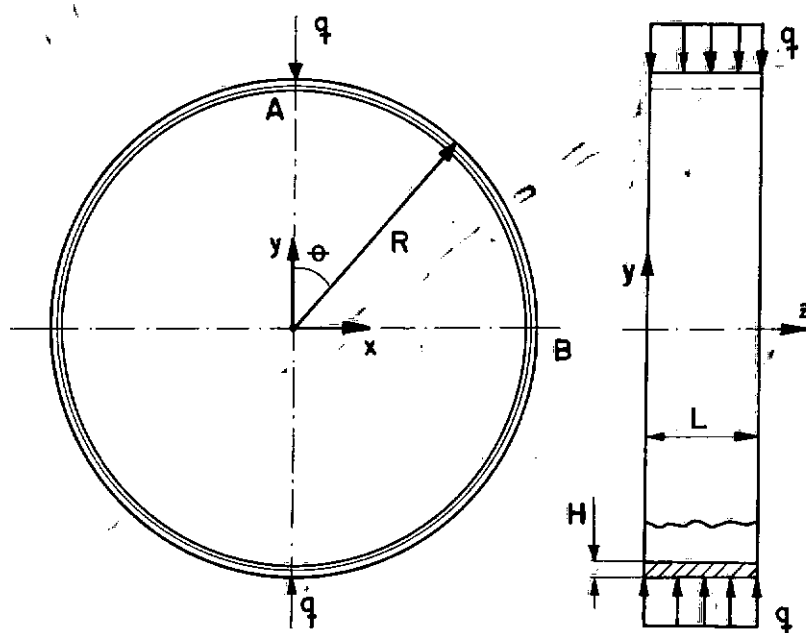
(*) Referência: ASHWELL (27)

Resultados numéricos:

Tabela VI.4 - Deslocamento transversal $W(D)$ sob a solicitação concentrada e erro (%).
Resultados numéricos

Malha (1/8 cilindro)	$W(D)$	Erro
1x4 (55 G.L.)	$1,4896 \times 10^{-3}$	93,9%
4x4 (175 G.L.)	$1,5196 \times 10^{-3}$	93,7%
8x8 (671 G.L.)	$4,9336 \times 10^{-3}$	79,8%
3x20 (679 G.L.)	$2,2030 \times 10^{-2}$	9,67%
3x30 (1019 G.L.)	$2,3682 \times 10^{-2}$	2,90%

VI.2.8. ANEL CIRCULAR. CARREGAMENTOS DISTRIBUÍDOS DIAMETRALMENTE OPOSTOS



Propriedades:

$$q = 4,0 \text{ Kgf/cm}$$

$$L = 1,0 \text{ cm}$$

$$R = 100, \text{ cm}$$

$$H = 0,1 \text{ cm}$$

$$\text{módulo de Young} = 21.000 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\text{coeficiente de Poisson} = 0,0$$

Figura VI.8 - Anel circular. Carregamentos distribuídos
diametralmente opostos

Solução analítica (unidimensional): TIMOSHENKO (21)

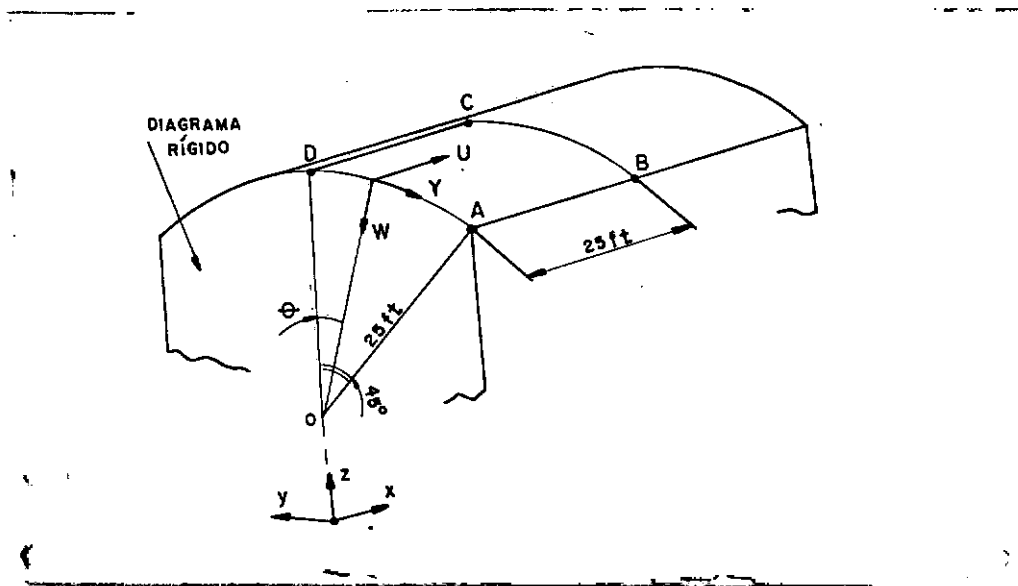
Resultados numéricos (1/4 anel):

- malhas:

(1x19) e (1x40) ; ($0 \leq Z \leq 1,0$ cm ; $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)

Veja Gráfico VI.4

VI.2.9. CASCA CILÍNDRICA SOB PESO PRÓPRIO ("BARREL VAULT"))



Propriedades:

módulo de Young = $3,0 \times 10^6$ lb_f/in²

coeficiente de Poisson = 0,0

peso específico = 90 lb_f · ft⁻²

Figura VI.9 - Casca cilíndrica sob peso próprio
("Barrel Vault")

Resultados analíticos:

ZIENKIEWICZ, TAYLOR, T00 (28)

Resultados numéricos (1/4 cilindro):

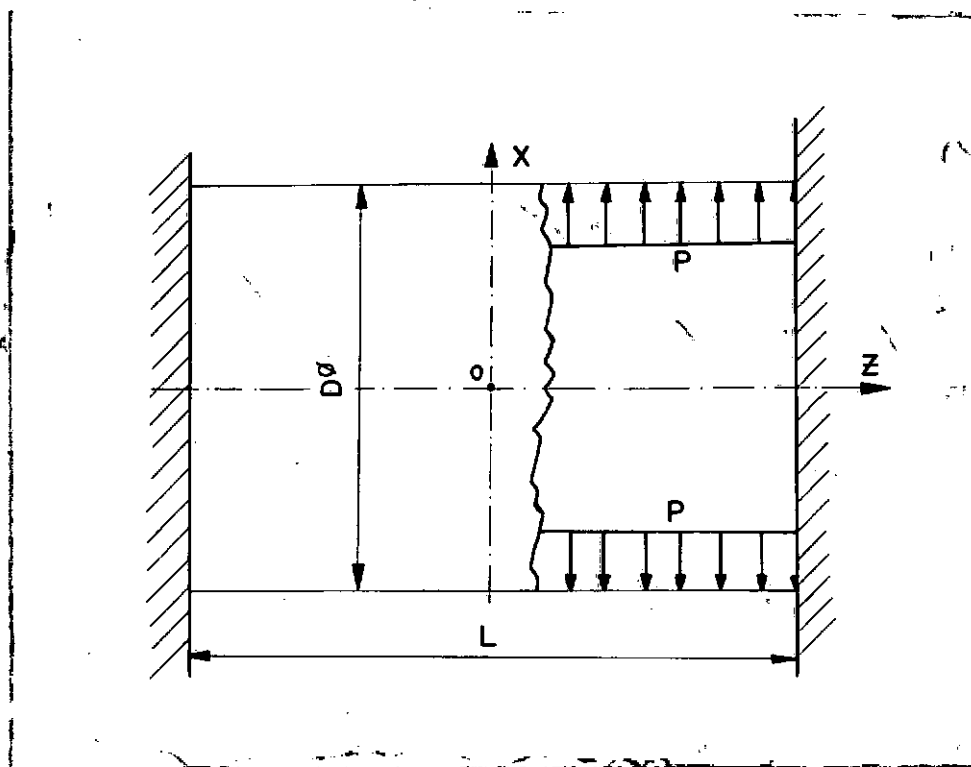
- malhas:

4x4 e 8x8 : ($0 \leq X \leq 25 \text{ ft} : 0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$).

elementos iguais

Veja Gráficos VI.5-8.

VI.2.10. CILINDRO BI-ENGASTADO. PRESSÃO INTERNA CONSTANTE



Propriedades:

módulo de Young = $0,21 \times 10^3 \text{ Kgf/cm}$

coeficiente de Poisson = 0,3

espessura (h) = 0,25 cm

diâmetro (D) = 10,0 cm

comprimento (L) = 10,0 cm

pressão (P) = 1,0 Kgf/cm²

Figura VI.10 - Cilindro bi-engastado sob pressão interna constante

Resultados analíticos:

KRAUS (9)

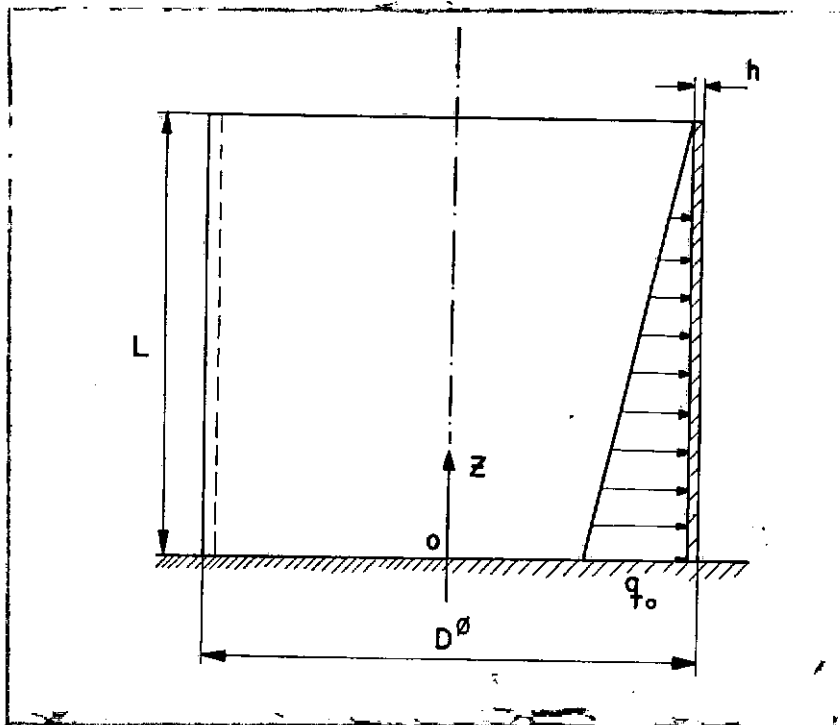
Resultados numéricos:

- malha:

$$1 \times 25 \quad (0 \leq \theta \leq 6^\circ ; 0 \leq Z \leq 5,0 \text{ cm})$$

Veja Gráficos VI-9-10.

VI.2.11. CASCA CILÍNDRICA ENGASTADA. CARREGAMENTO HIDROSTÁTICO



Propriedades:

módulo Young = $1,0 \times 10^8$ psi

coeficiente Poisson = 0,250

espessura (h) = 14 in

diâmetro (D) = 60 ft

altura (L) = 26 ft

densidade do fluido = $0,03613 \text{ lb/in}^3$

Figura VI.11 - Casca cilíndrica sob carregamento hidrostático

Resultados analíticos:

TIMOSHENKO, W.-KRIEGER (20)

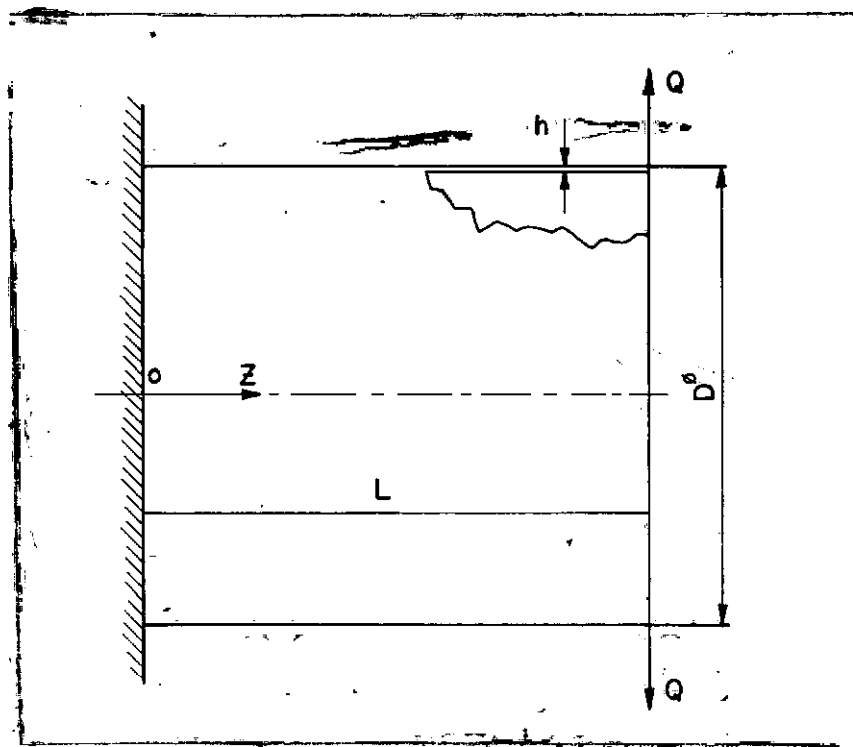
Resultados numéricos:

- malha:

1×40 ($0 \leq \theta \leq 6^\circ$; $0 \leq Z \leq 26$ ft). Elementos iguais.

Veja Gráficos VI.11-12.

VI.2.12. CILINDRO ENGASTADO. CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO CONSTANTE NO BORDO LIVRE



Propriedades:

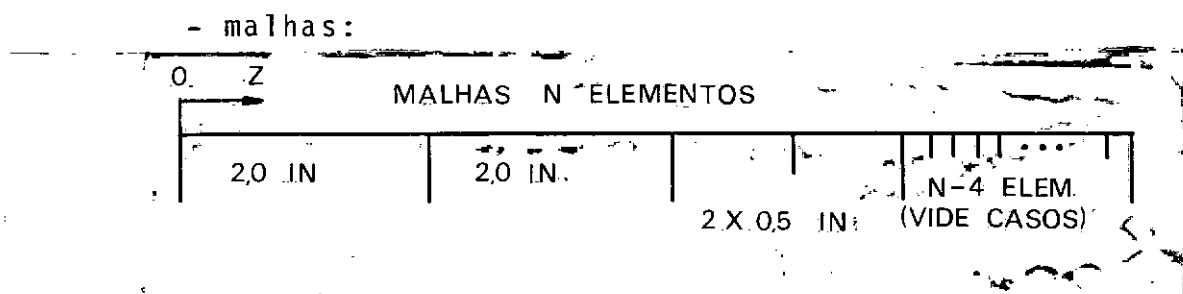
módulo Young = 10^7 psi
coeficiente Poisson = 0,30
espessura (h) = 0,01 in
comprimento (L) = 6,0 in

Figura VI.12 - Cilindro engastado sob carregamento distribuído constante no bordo livre

Resultados analíticos:

GRAFTON, STROMET (29)

Resultados numéricos:



CASO 1 : 5 elementos (malha 1x9)

CASO 2 : 10 elementos (malha 1x14)

CASO 3 : 20 elementos (malha 1x24)

Figura VI.13 - Malhas utilizadas

Deflecção transversal máxima (bordo livre):

W_{MAX} (analítica): $2,87426 \times 10^{-3}$ in

Tabela VI.5 - Deflecção transversal W (in) no bordo livre.
Análise comparativa entre as malhas

Malha	W_{MAX} ($\times 10^{-3}$ in)	Erro%
1x9	2,8576	0,58%
1x14	2,8727	$5,4 \times 10^{-2}$ %
1x24	2,8739	$1,2 \times 10^{-2}$ %

Veja Gráficos VI.13-14.

VI.2.13. CASCA ESFÉRICA ENGASTADA. PRESSÃO INTERNA CONSTANTE

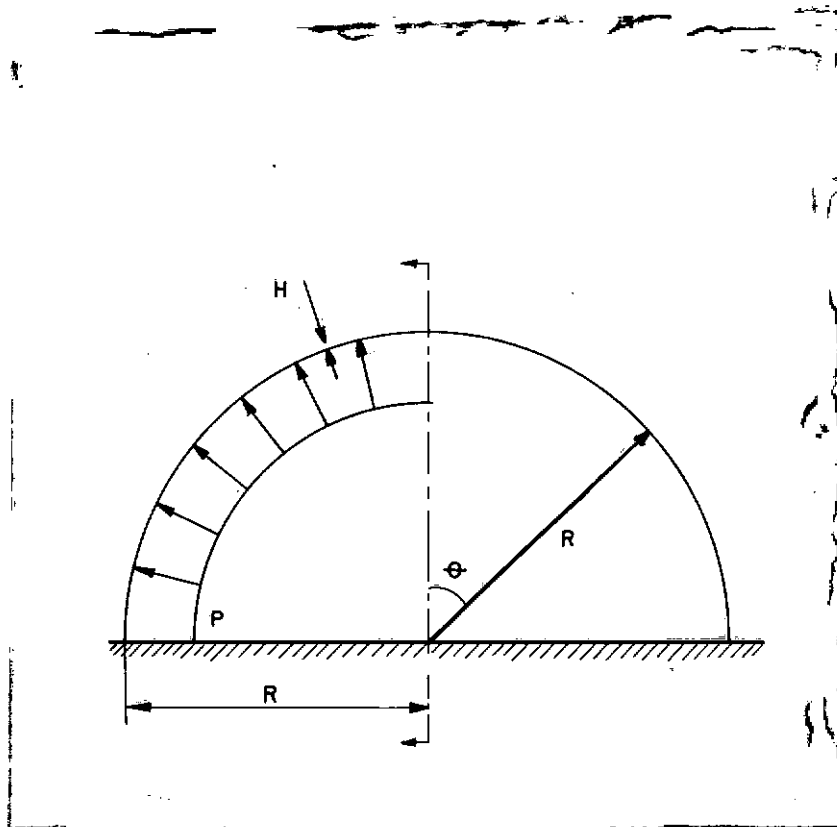


Figura VI.14 - Casca esférica. Pressão interna constante

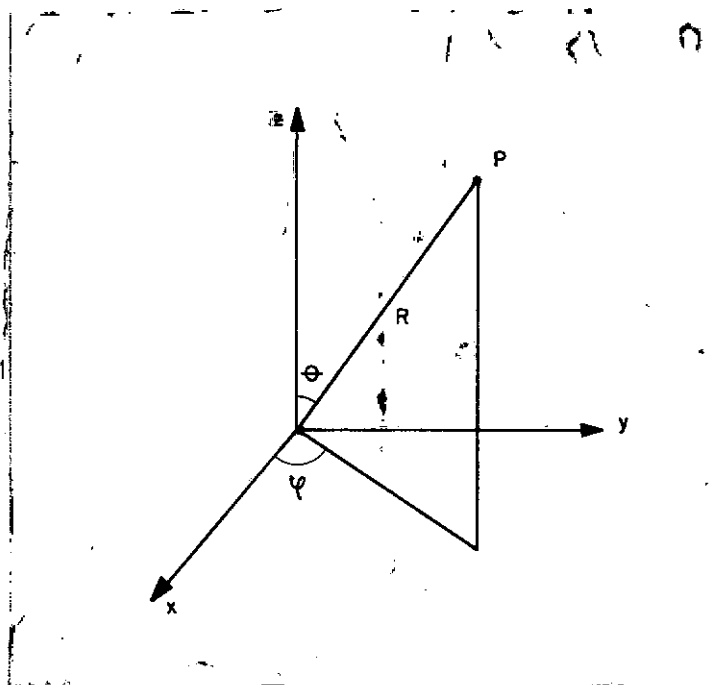


Figura VI.15 - Coordenadas esféricas (ψ, θ)

Propriedades:

módulo Young = 21.000 Kgf/cm²

coeficiente de Poisson = 0,30

espessura (h) = 1, cm

raio da esfera (R) = 100 cm

Resultados analíticos:

KRAUS (.9.)

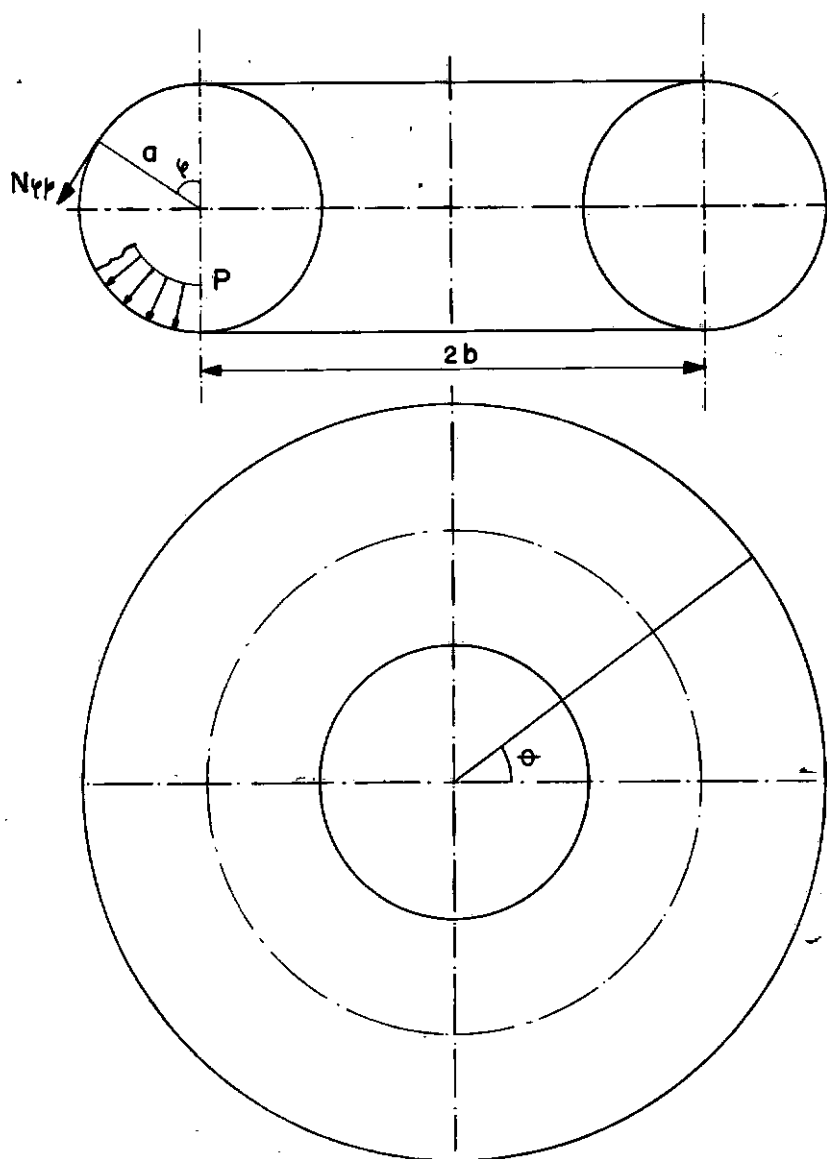
Resultados numéricos:

- malha:

1x20 ($0 \leq \psi \leq 6^\circ$; $0 \leq \theta \leq 90^\circ$). Elementos iguais.

Veja Gráficos VI.15-17.

VI.2.14. CASCA TOROIDAL. PRESSÃO INTERNA CONSTANTE



Propriedades:

módulo de Young = 21.000 Kgf/cm²

coeficiente de Poisson = 0,3

raio (a) = 5,0 cm

raio (b) = 20,0 cm

espessura (H) = 0,1 cm

pressão interna (P) = 1,0 Kgf/cm²

Figura VI.16 - Toro sob pressão interna constante

Resultados analíticos:

TIMOSHENKO, WOINOWSKY-KRIEGER (20)

Resultados numéricos:

- malha:

1x20 ($0 \leq \theta \leq 6^\circ$; $- 90^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$). Elementos iguais.

Veja Gráfico VI.18.

PLACA CIRCULAR COM ORIFÍCIO
SOLICITAÇÃO DIST. CONST. NO BORDO LIVRE

(—) REF: TIMOSHENKO

(•) MALHA 1x10

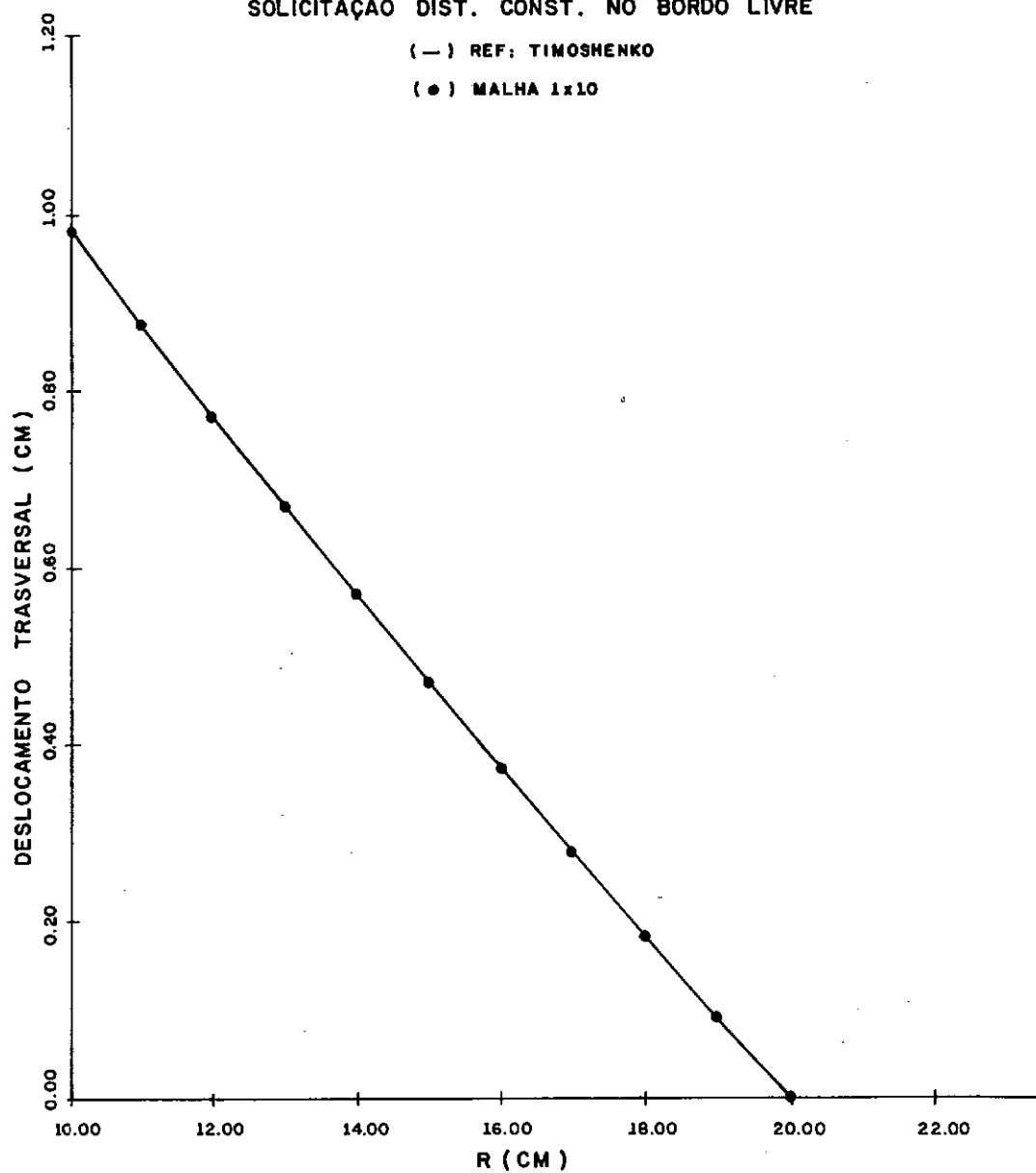


Gráfico V.2 — $R(\text{cm}) \times$ Deslocamento transversal $W(\text{cm})$

PLACA CIRCULAR COM ORIFICIO
SOLICITAÇÃO DIST. CONST. NO BORDO LIVRE

(—) REF: TIMOSHENKO

(•) MALHA 1x10

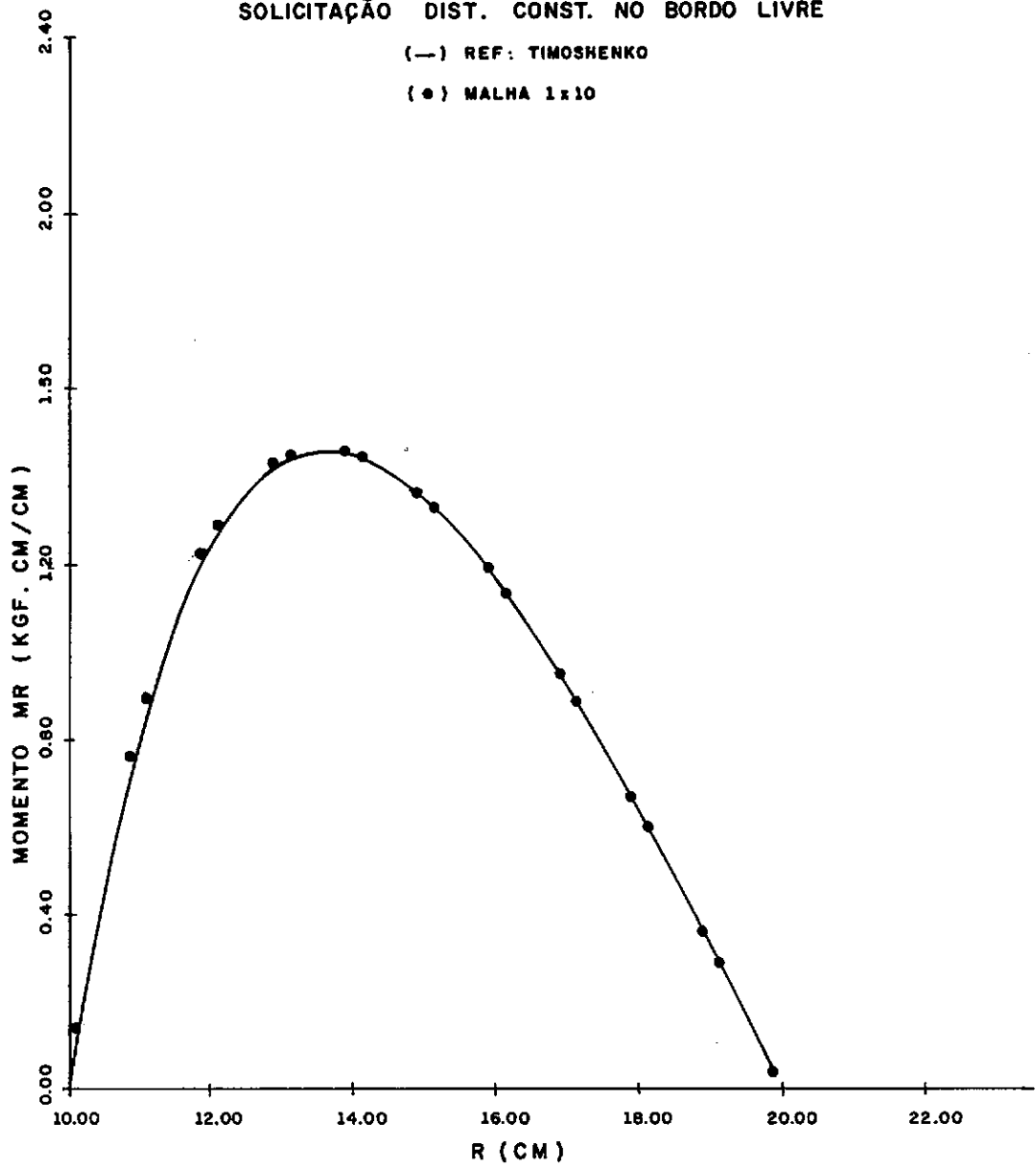


Gráfico VI. 3 — R (cm) x Momento generalizado M_{rr} / M_R / (Kgf. cm / cm)

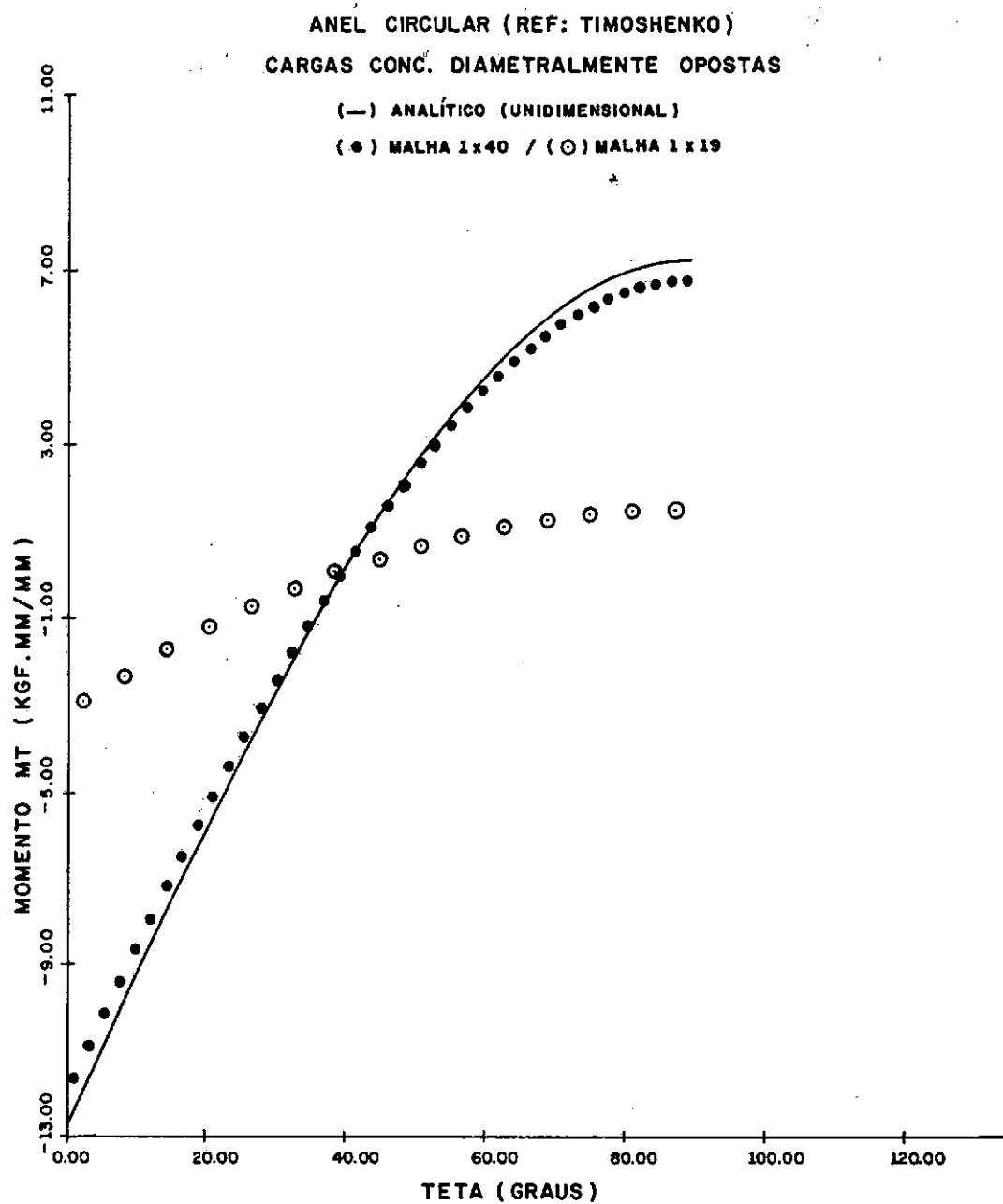


Gráfico VI. 4 - Momento $M_{\theta\theta}^{(0)}/MT / (Kgf. cm/cm) \times Teta (Graus)$

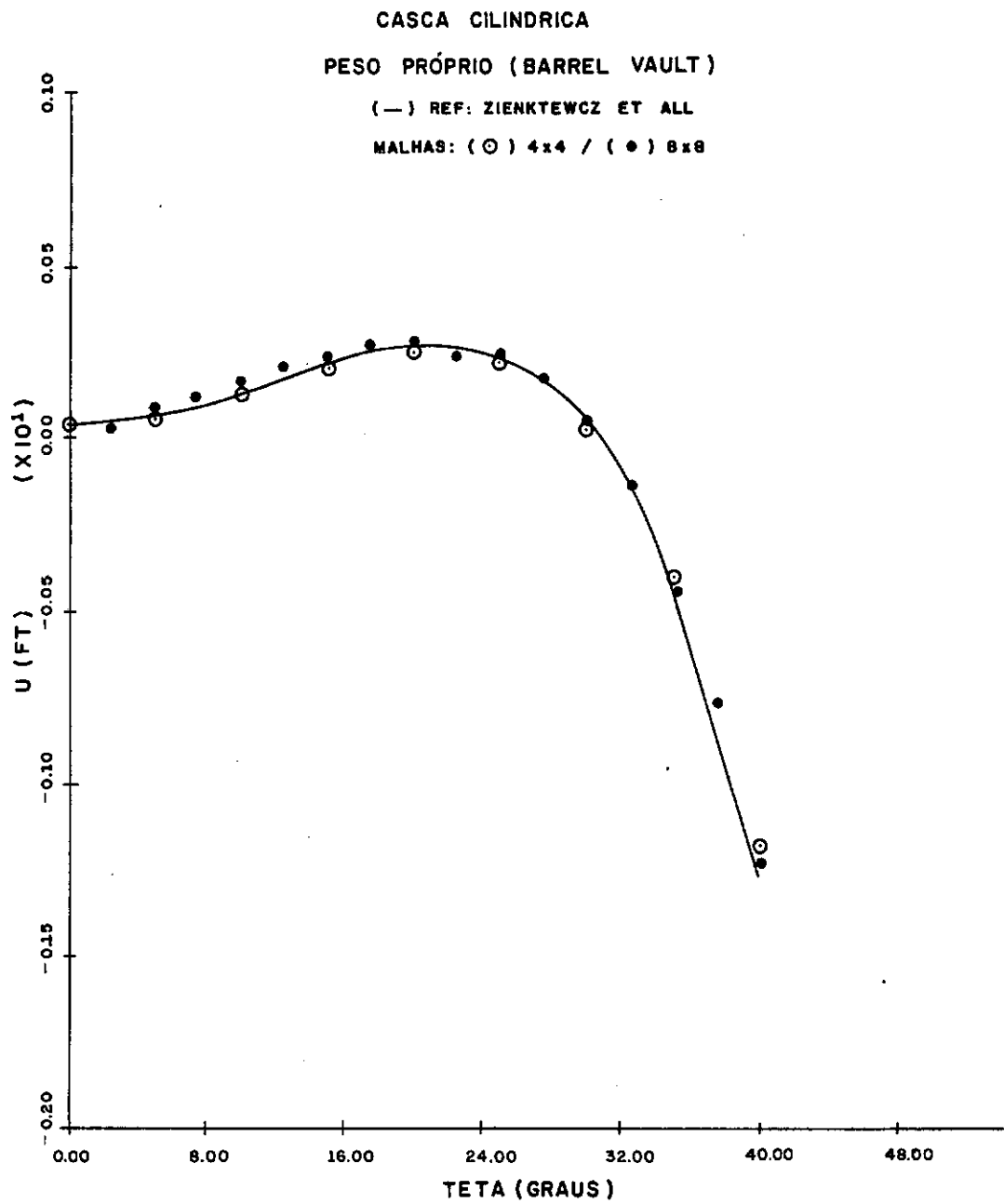


Gráfico VI. 5 — Deslocamento longitudinal U (ft) x θ (Graus).
Seção \overline{AD} (veja Figura VI. 9).

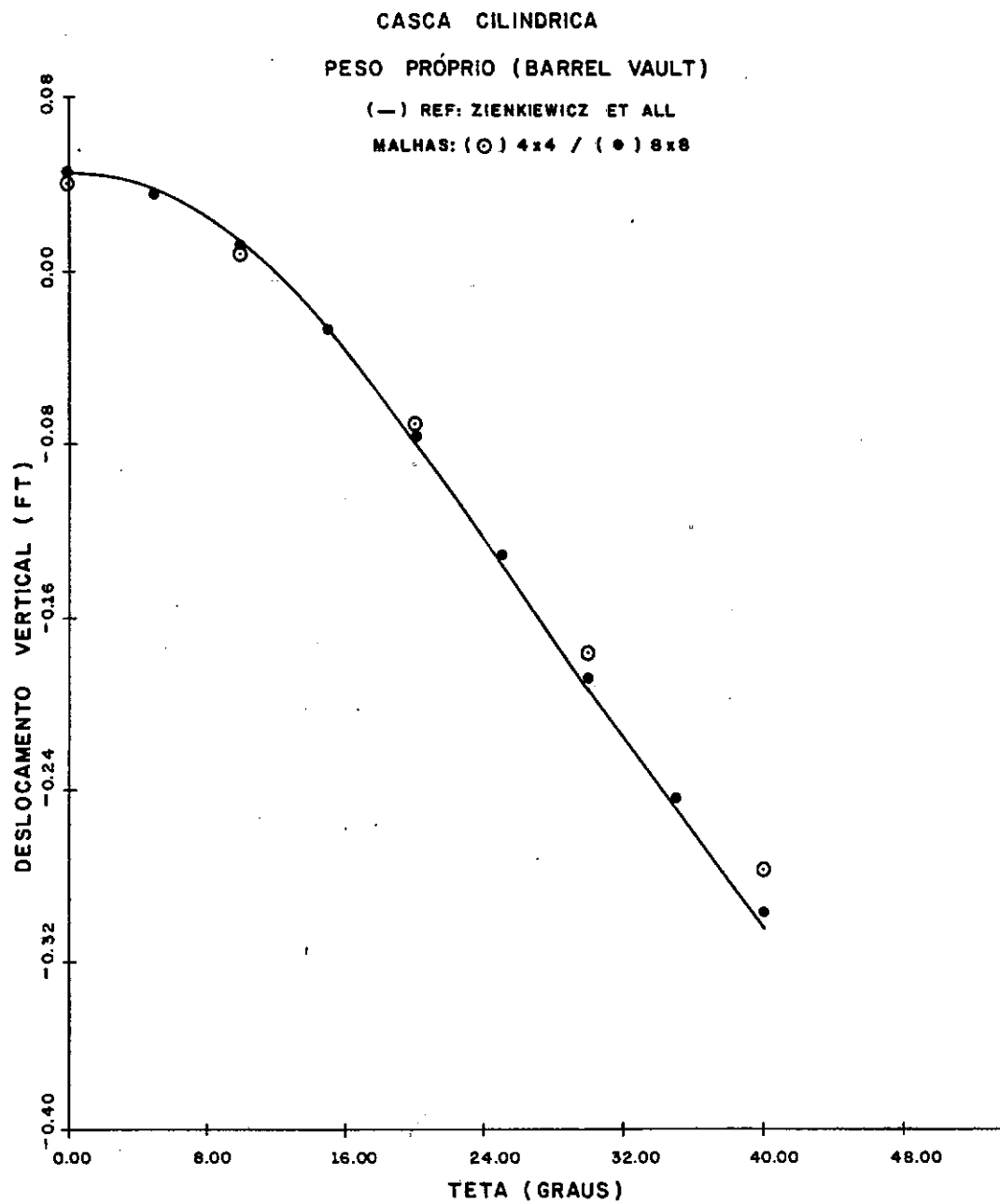


Gráfico VI. 6 — Deslocamento vertical (ft) x θ (Graus).

Seção central \overline{BC} (veja Figura VI. 9)

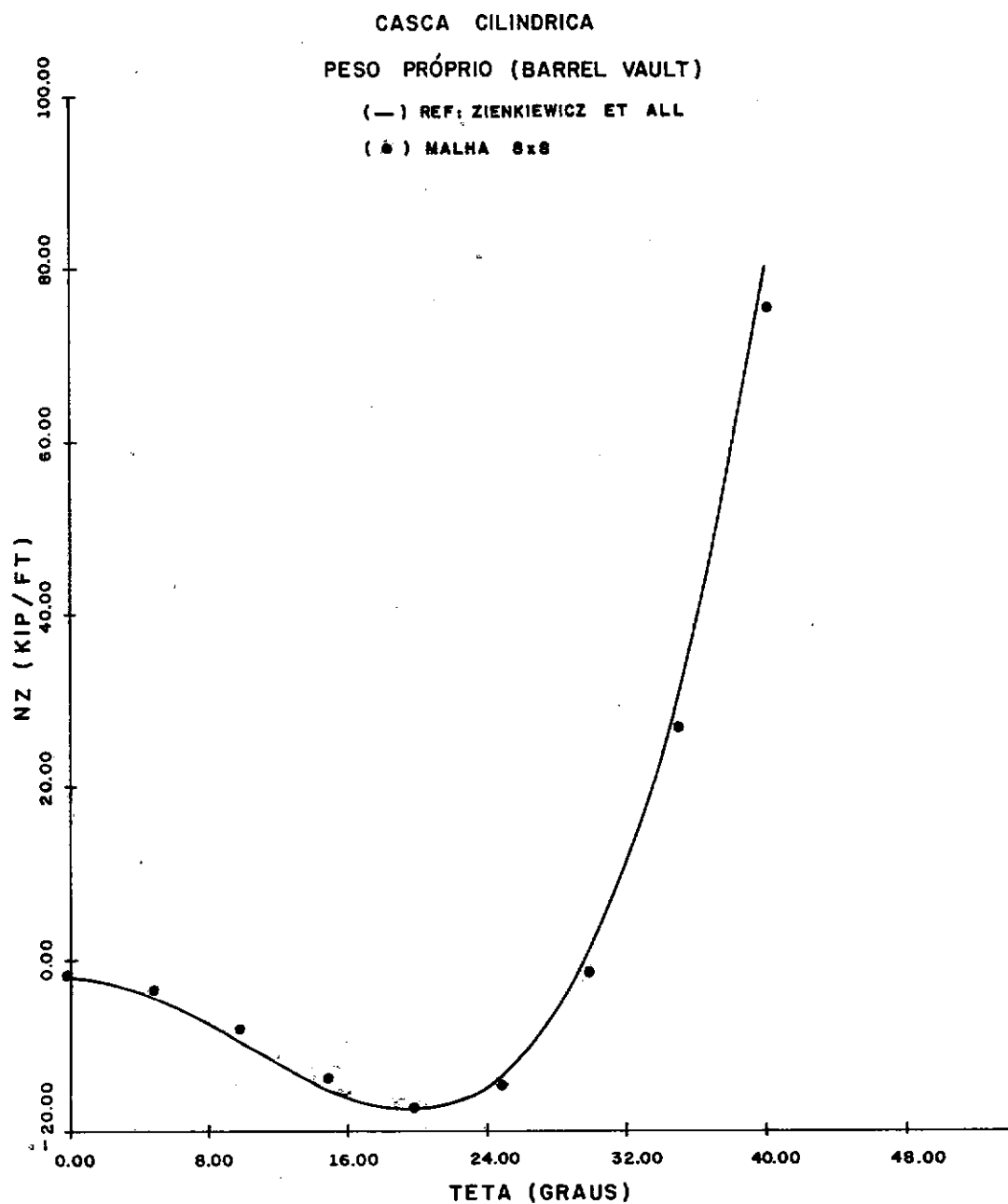


Gráfico VI. 7 — Tensão longitudinal $N_{zz} / NZ / (Lb_f \cdot \text{in/in}) \times \theta$ (Graus).
Seção central \overline{BC} (veja Figura VI.9)

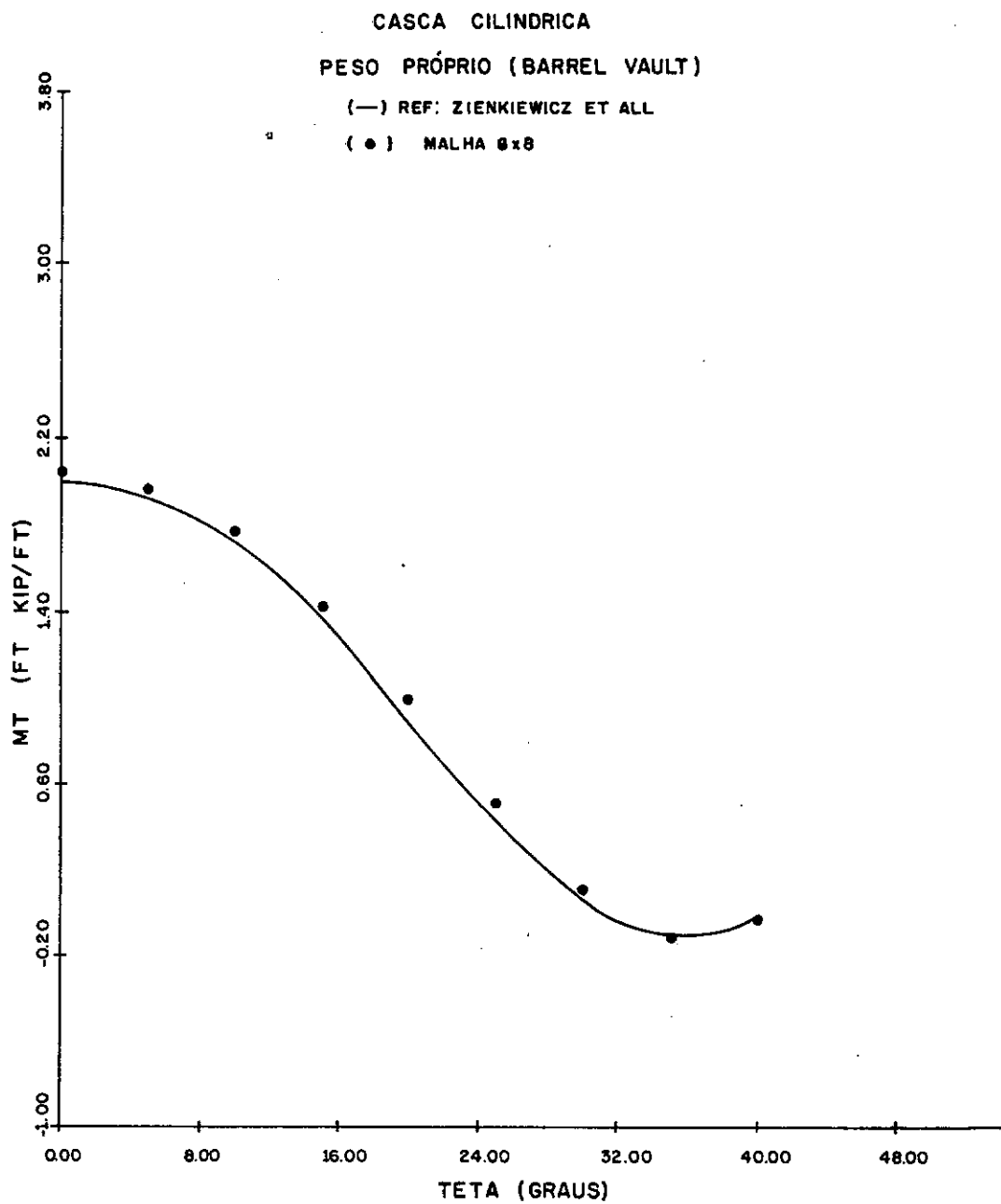


Gráfico VI.8 - Momento $M_{\theta\theta} / MT / (Lb_f \cdot \text{in/in}) \times (\text{Graus})$.

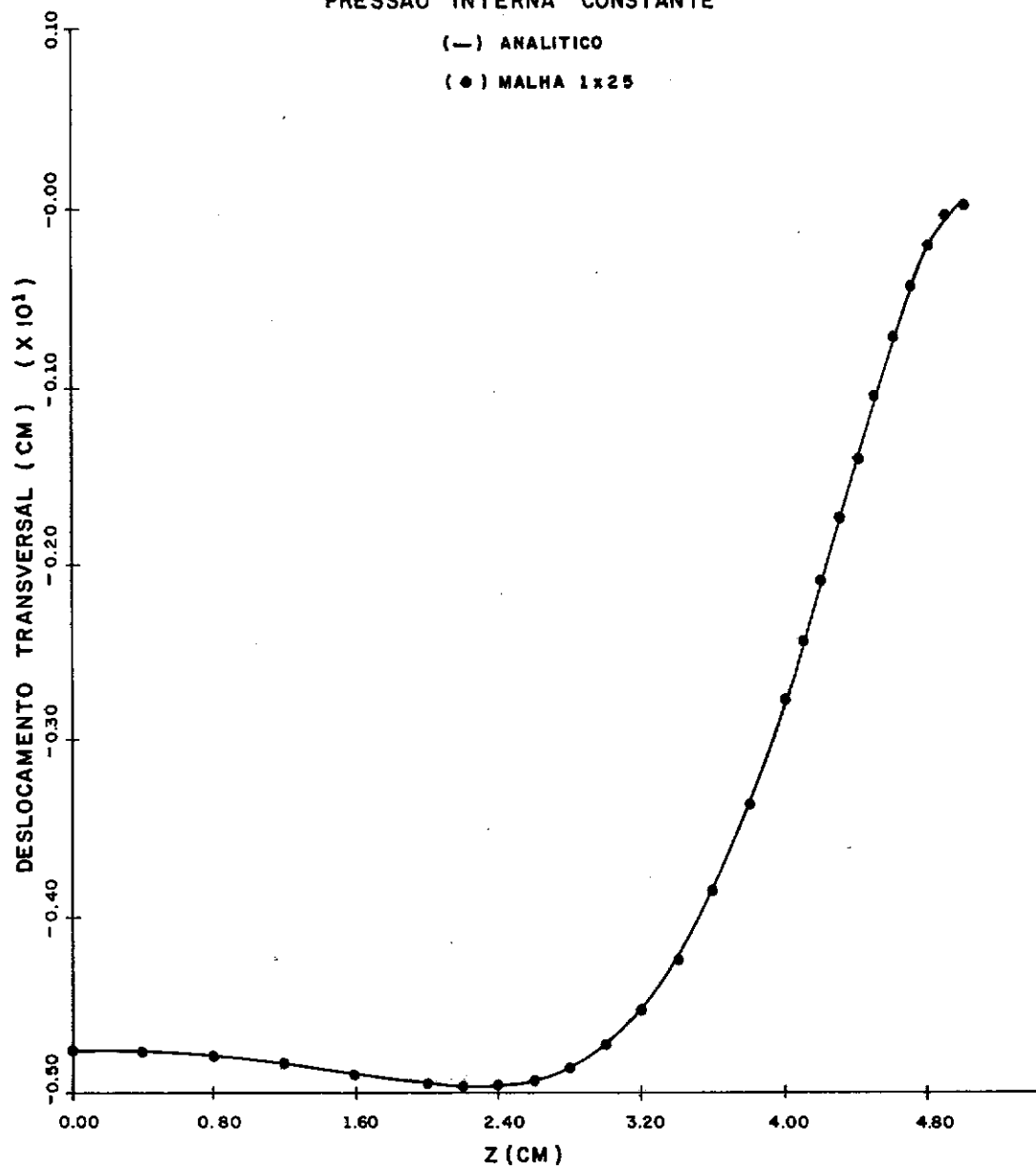
Seção central BC (veja Figura VI.9)

CILINDRO BI-ENGASTADO (REF: KRAUS)

PRESSÃO INTERNA CONSTANTE

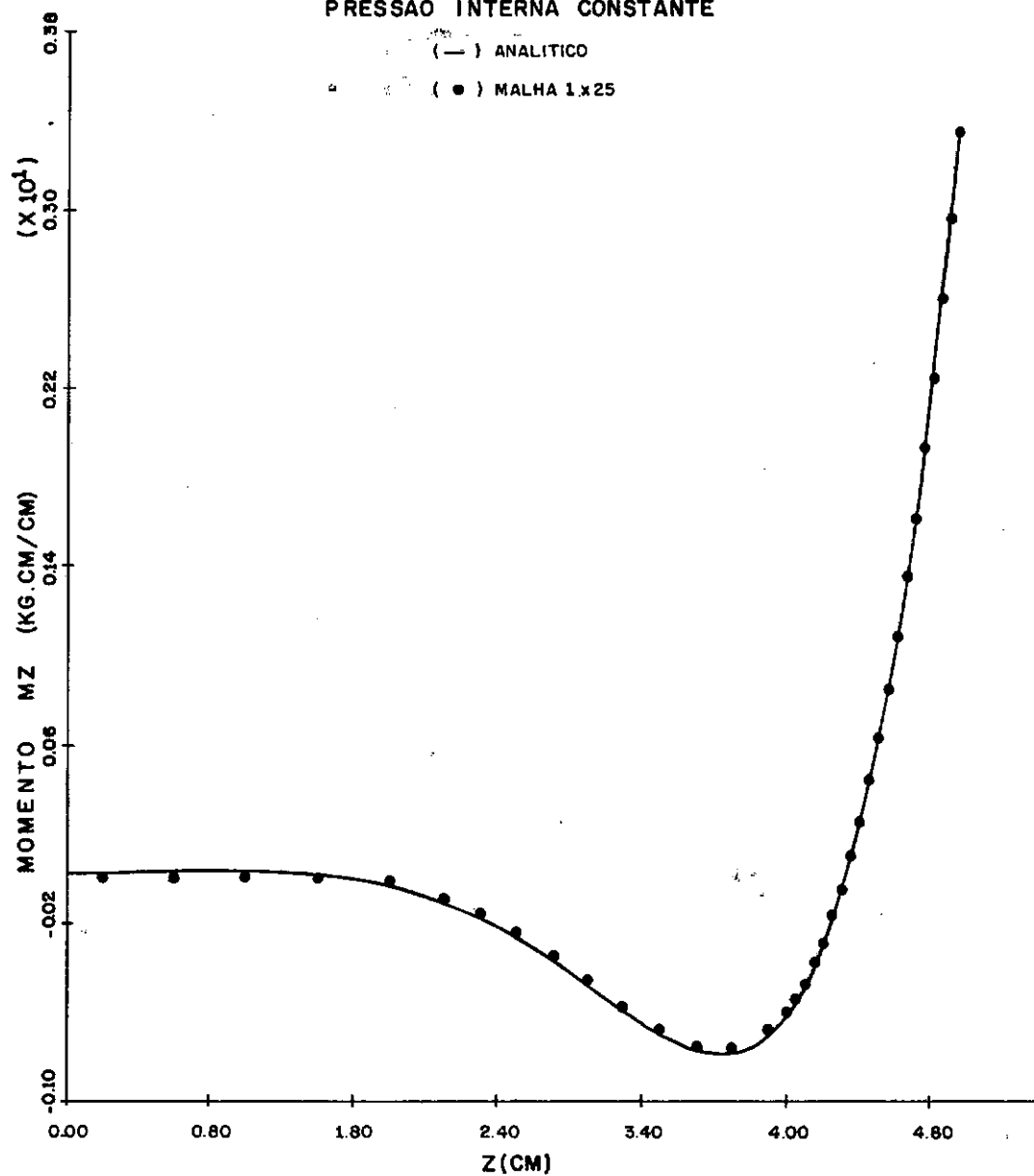
(—) ANALÍTICO

(●) MALHA 1x25

Gráfico VI.9 — Deslocamento transversal W (cm) x Z (cm)

CILINDRO BI-ENGASTADO (REF:KRAUS)

PRESSÃO INTERNA CONSTANTE

Gráfico VI.10 - Momento longitudinal $M_{zz}/M_z / (\text{Kgf} \cdot \text{cm/cm}) \times Z(\text{cm})$

CASCA CILINDRICA ENGASTADA
CARREGAMENTO HIDROSTÁTICO

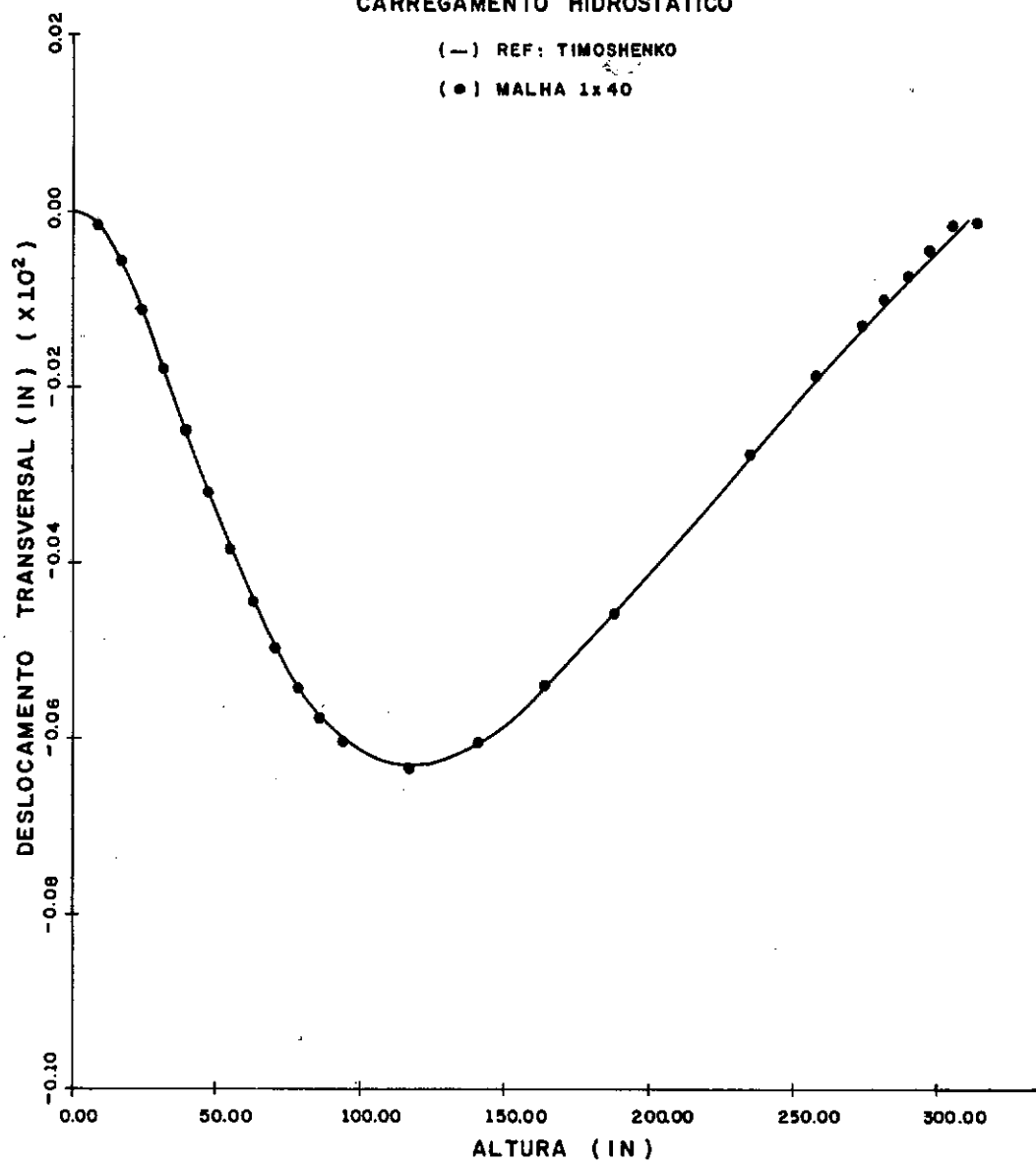


Gráfico VI.11 — Deslocamento transversal W (in) x altura Z (in)

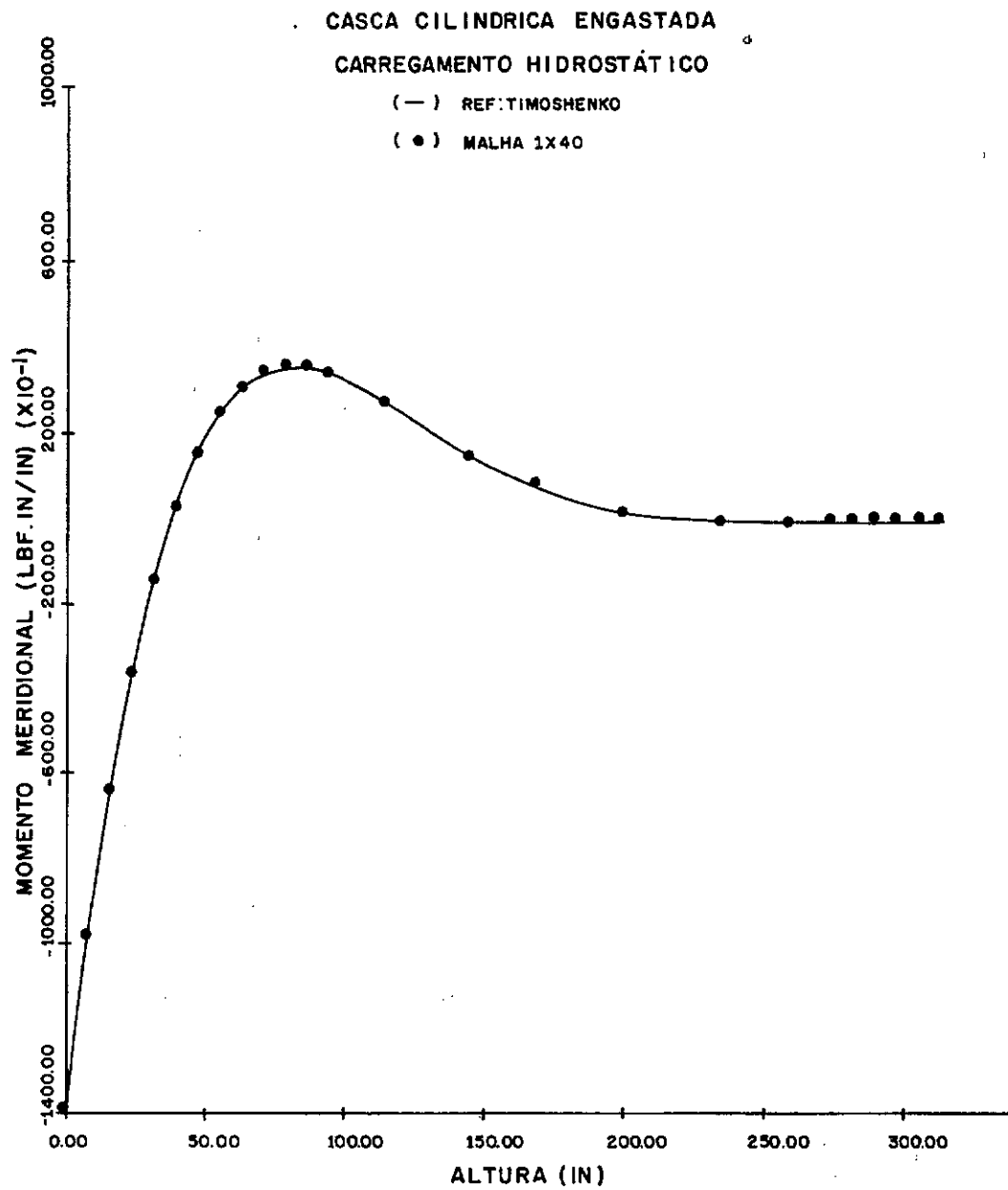


Gráfico VI. 12 - Momento meridional M_{zz} (Lb_f · in/in) X altura Z(in)

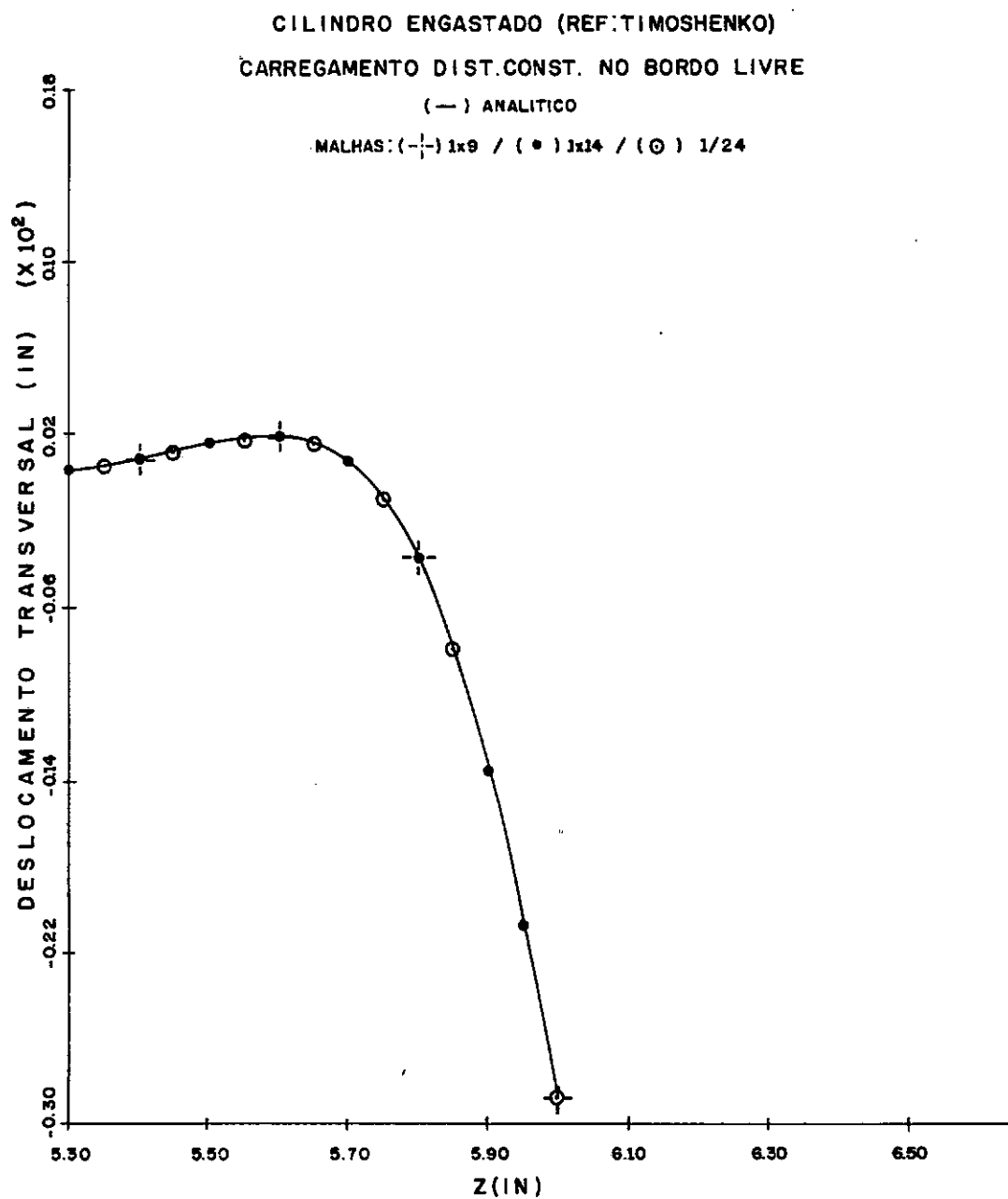


Gráfico VI.13 - Deslocamento transversal $W(\text{in}) \times Z(\text{in})$
 (veja Figura VI.12)

CILINDRO ENGASTADO (REF:TIMOSHENKO)
 CARREGAMENTO DIST.CONST. NO BORDO LIVRE

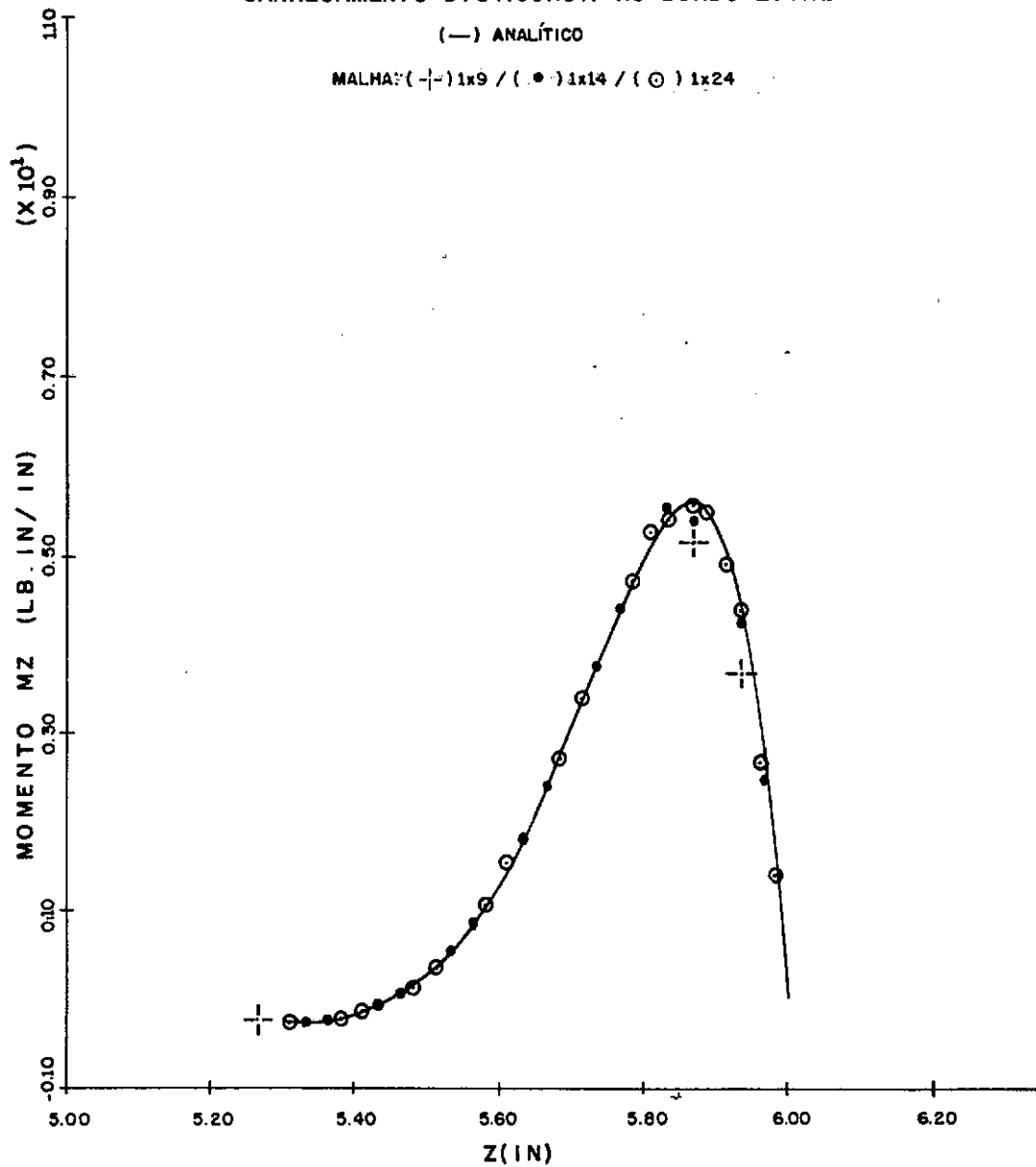


Gráfico VI.14 - Momento meridional $M_{zz}/MZ/(Lbf \cdot in/in) \times Z(in)$
 (veja Figura VI.12)

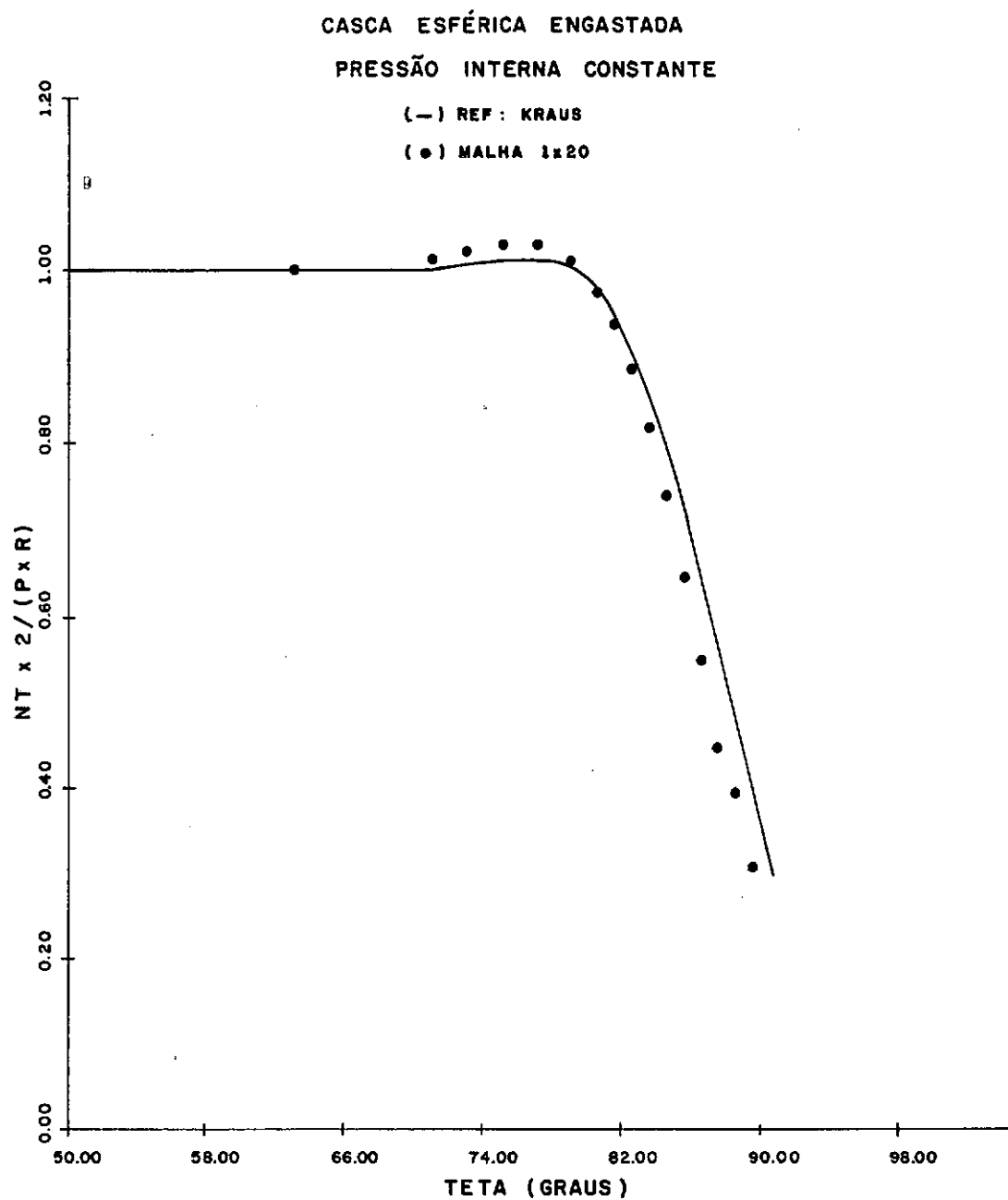


Gráfico VI.15 — Tensão generalizada $N_{\theta\theta} / NT / (Kgf \cdot cm/cm) \times \theta$ (Graus)
P = pressão interna , R = raio da esfera

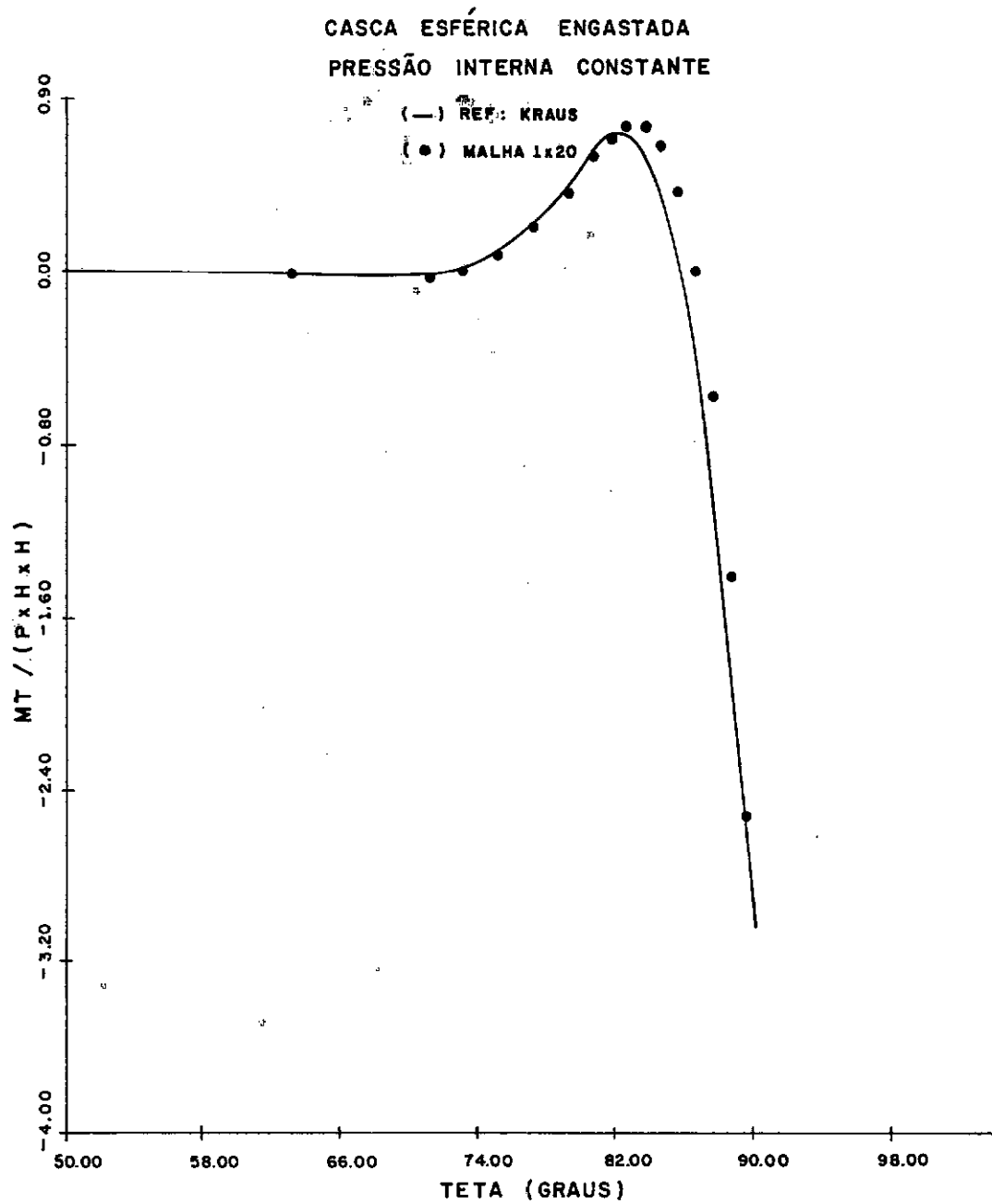


Gráfico VI.16 — Momento generalizado $M_{\theta\theta} / MT / (Kgf.cm/cm) \times \theta$ (Graus)

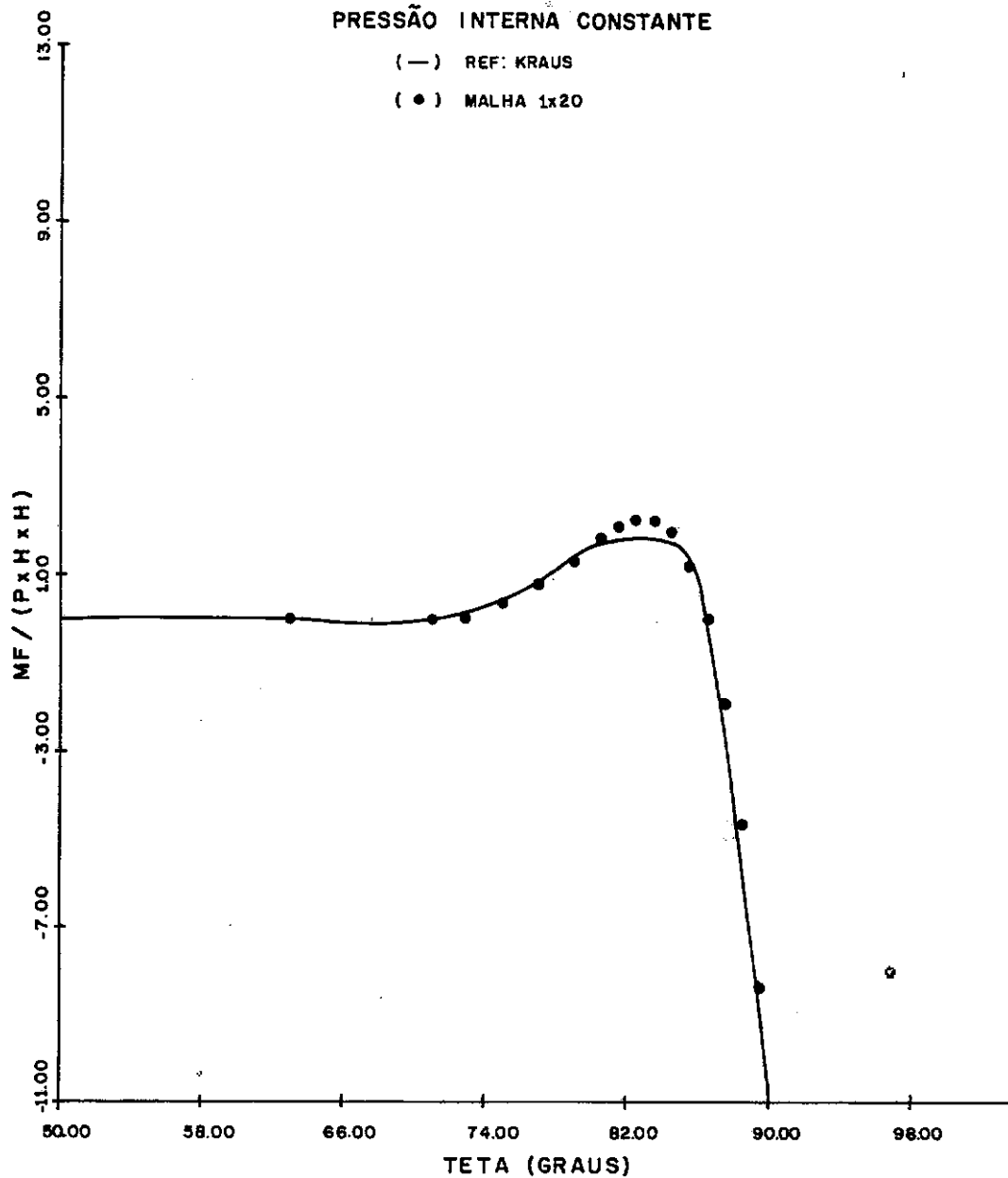
P = pressão interna, H = espessura da casca

CASCA ESFÉRICA ENGASTADA

PRESSÃO INTERNA CONSTANTE

(—) REF: KRAUS

(•) MALHA 1x20

Gráfico VI. 17 - Momento $M_{\psi\psi} / MF / (Kgf.cm/cm) \times \Theta$ (Graus)

P = pressão interna, H = espessura da casca

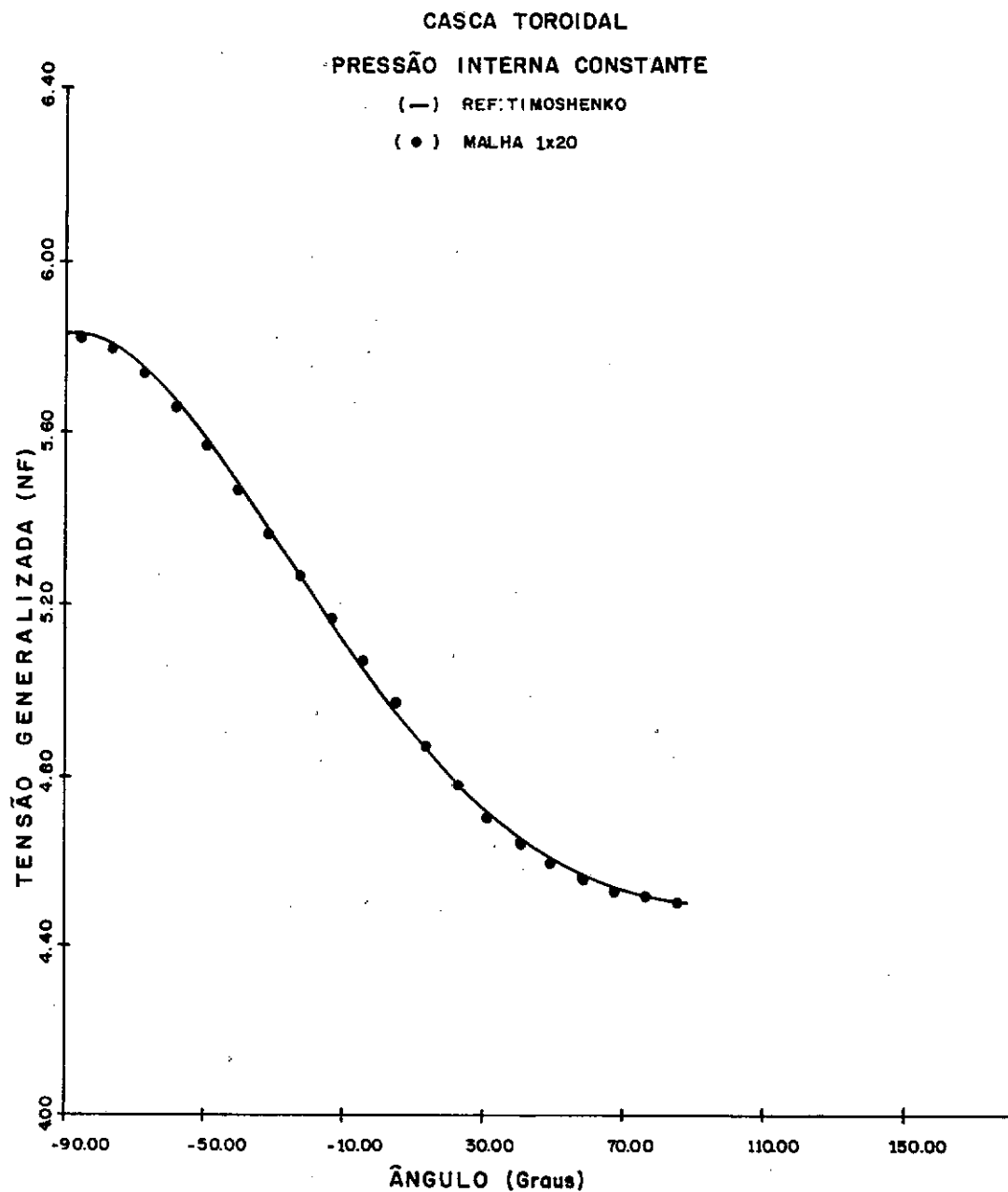


Gráfico VI.18 - Tensão $N\psi\psi/NF/(Kgf/cm) \times \text{ângulo } \psi$ (Graus)

CAPÍTULO VII

CONCLUSÃO

Concluimos o presente trabalho realizando uma análise crítica dos resultados obtidos. Como teste do elemento foram analisados os seguintes casos:

- placas retangulares
- placas circulares
- cascas cilíndricas
- cascas esféricas
- cascas torçoidais

As placas retangulares analisadas apresentaram, como esperado, ótimos resultados quando comparados com as soluções analíticas. A placa retangular sob carregamento hidrostático e relação de aspecto (1) apresentou entretanto problemas na convergência do deslocamento central (veja seção VI.2 - Problema 4).

Tabela VII.1 - Placa retangular sob carregamento
hidrostático

Relação de aspecto ($M/N = 1$)
malha 4x4 = erro deslocamento central = 0,4%
malha 8x8 = erro deslocamento central = 0,4%
Relação de aspecto ($M/N = 1,5$)
malha 8x8 = erro deslocamento central = 0,16%

Com a mudança da relação de aspecto para (1,5), mantendo-se a malha (8x8), verificou-se um aprimoramento da solução. Os resultados analíticos ODLEY (25) e YOUNG (24) foram obtidos por séries de Fourier, sendo truncados, obtiveram-se resultados numéricos aproximados. É possível que este problema seja decorrente de imprecisões nos cálculos numéricos das soluções analíticas.

O exemplo analisado para placas circulares apresentou ótima convergência. Uma limitação para o elemento desenvolvido foi entretanto verificada. Parametrizando-se a superfície média da placa através de coordenadas polares, apresenta o centro da placa como um ponto singular. Evidencia-se portanto a impossibilidade de se representar placas circulares sem orifícios.

Implementou-se um exemplo de cascas esféricas sendo observado um comportamento razoável do elemento. Melhores resultados poderiam ter sido obtidos caso, mantendo-se o mesmo número de graus de liberdade, se refinasse melhor a malha nas proximidades do engastamento.

O exemplo de casca toroidal, apesar de possuir uma solução analítica muito simples (Teoria de Membranas), apresenta aspectos bem interessantes já que são analisadas variações para os raios de curvatura de valores finitos a infinitos. Os resultados obtidos foram estupendos.

Analisando-se cascas cilíndricas efetuou-se um estudo mais rigoroso do elemento. Dois dos testes desenvolvidos são considerados como padrões para testes de elemento ASHWELL ((27)):

- casca cilíndrica sob peso próprio (*Barrel Vault*)
- casca cilíndrica sob carregamentos concentrados (diametralmente opostos) (*Pinned Cylinder*)

Outros exemplos axisimétricos foram analisados para cascas cilíndricas sendo obtidos resultados excelentes.

Dois exemplos de cascas cilíndricas sob carregamentos diametralmente opostos foram analisados. Observou-se uma convergência monótona dos resultados à solução de G. Cantin. Esta convergência foi entretanto lenta se comparada com outros elementos fornecidos na literatura especializada ASWELL (27) (veja Tabelas VII.2-3). Esta lentidão na convergência conforme observado por diversos autores CANTIN, CLOUGH (30), FONDER, CLOUGH (31), ASHWELL (27) é, de forma geral, comum em elementos de cascas finas. Este comportamento segundo CANTIN, CLOUGH (30) pode ser aprimorado pela adição de modos de deslocamentos rígidos ao elemento.

Analisando-se um problema semelhante ao anterior testou-se o comportamento de um anel sob solicitações diametralmente opostas. Para este exemplo soluções analíticas simples são co-

nhecidas TIMOSHENKO (21). Duas malhas (1x19) e (1x40) foram analisadas sendo evidenciadas uma forte discrepância entre as duas soluções e a necessidade de se efetuar um refinamento expressivo das malhas para se obter resultados aceitáveis.

Os exemplos do anel circular e da casca cilíndrica sob carregamento concentrado (*pinched cylinder*) possuem em comum o fato de suas deformações estarem governadas por movimentos inextensionais.

Tabela* VII.2 - Deflecção (polegadas) sob a solicitação concentrada (W_D - Problema) - Casca cilíndrica sob carregamentos concentrados diametralmente opostos. Cilindro espesso. Resultado analítico (Cantin) = 0,1139". Valores em parênteses representam número de equações

Malha (1/8 cilindro)	Cantin	Ashwell & Sabir	Presente elemento
1x4	-	0,1106 (50)	$4,301 \times 10^{-2}$ (55)
4x4	0,1126 (150)	0,1129 (125)	$4,437 \times 10^{-2}$ (175)
8x8	0,1139 (486)	0,1137 (405)	0,10175 (671)
3x20	-	-	0,11270 (679)
3x30	-	-	0,11297 (1019)

* Referência: ASHWELL (27).

Tabela* VII.3 - Deflecção (polegadas) sob a solicitação concentrada. Casca cilíndrica sob carregamentos diametralmente opostos. Cilindro delgado. Resultado analítico: (Cantin) = 0,02439". Valores em parênteses representam número de equações

Malha (1/8 cilindro)	Ashwell & Sabir	Cantin & Clouth	Presente elemento
1x4	0,0240 (50)	$0,74 \times 10^{-3}$ (60)	$1,49 \times 10^{-3}$ (55)
4x4	-	-	$1,52 \times 10^{-3}$ (175)
3x8	0,0242 (180)	$0,69 \times 10^{-2}$ (216)	-
8x8	0,0243 (405)	$0,71 \times 10^{-2}$ (486)	$4,93 \times 10^{-3}$ (671)
3x20	-	-	0,02030 (679)
3x30	-	-	0,02368 (1019)

* Referência: ASHWELL (27).

Considerando a casca cilíndrica sob peso próprio, apesar de apresentar convergência monótona às soluções analíticas, verificou-se que esta convergência foi lenta se comparada com a performance de outros elementos finitos apresentados na referência ASHWELL (27).

Observou-se em suma um bom comportamento do elemento analisado sendo entretanto também detectada uma lentidão na convergência das soluções para alguns casos analisados.

Adotou-se polinômios de interpolação de graus relativamente elevados donde se esperava que em discretizações das malhas mais ou menos grosseiras se obtivessem, para os casos analisados, bons resultados. Os exemplos da casca cilíndrica sob

peso próprio (*barrel vault*) e o *pínch test* porém invalidaram, em parte, esta expectativa. Obteve-se, com as interpolações adotadas, matrizes de rigidez elementar relativamente grandes (32x32 elementos) acarretando fortes limitações quanto ao refinamento da malha.

Outro problema, também observado para este elemento, surge com o acoplamento entre cascas de diferentes raios de curvatura. Implícita na teoria de Kirchhoff-Love está a continuidade das rotações das normais à superfície média (descrita por $\nabla_n \underline{v}_{ot} - \nabla v_n$).

Garantida a continuidade dos raios de curvatura nos é suficiente garantir as continuidades para os deslocamentos longitudinais e para os deslocamentos transversais e suas primeiras derivadas de forma a obtermos continuidade nas rotações. Os raios de curvatura sendo descontínuos nas fronteiras dos elementos (acoplamento entre cascas) acarretam, para se garantir a continuidade das rotações, descontinuidades nos deslocamentos longitudinais ou nas derivadas primeiras do deslocamento transversal. Estes problemas não foram, por ocasião da tese, analisados em profundidade, entretanto poderiam provavelmente ser solucionados caso adotadas as respectivas rotações como graus de liberdade.

Os problemas aqui levantados limitam as aplicações do elemento desenvolvido. Sugerimos como continuidade ao trabalho a análise do acoplamento de cascas com diferentes raios de curvatura e a substituição da parametrização através das direções principais de curvatura por uma genérica extendendo portanto as possíveis aplicações do elemento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) GERMAIN, P., La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, Première partie. Théorie du second gradient, Journal de Mécanique, vol. 12, nº 2, juin 1973.

- (2) _____, The method pf virtual power in continuum mechanics, Part 2, Microstructure, SIAM, Journal Appl. Math., nº 25, pp. 556-575.

- (3) _____, Sur l'impact des certains concepts mathématiques en mécanique, V Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 3 de agosto de 1982.

- (4) _____, Four lectures on the foundations of shell theory, Módulo I, Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Teoria das Cascas e Suas Aplicações na Engenharia, LCC, 1982.

- (5) _____, Course de Mécanique, École Polytechnique, Tomo I, 1980.

- (6) GURTIN, M.E., An introduction to continuum mechanics, Academic Press, 1981.

- (7) FEIJÓO, R.A. e TAROCO, E., Princípios Variacionais y el método de los elementos finitos en la teoria de placas y cascaras, Módulo II, Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Teoria das Cascas e Suas Aplicações na Engenharia, LCC, 1983.
- (8) TAROCO, E. e FEIJÓO, R.A., Theoria de placas y cascaras. Curso de Mecânica Teórica e Aplicada. Teoria das Cascas e Suas Aplicações na Engenharia. Módulo II, LCC, 1983.
- (9) KRAUS, H., Thin elastic shells, John Wiley and Sons, 1967.
- (10) WASHIZU, K., Variational methods in elasticity and plasticity, Pergamon Press, 1968.
- (11) DESTUYNDER, P., Introduction à la theorie des coques minces elastiques, Analyse numérique des problèmes de coques minces, Description des Resultats et Exemples, INRIA, 1981.
- (12) FLÜGGE, W., Tensor analysis and continuum mechanics, Springer-Verlang, 1970.
- (13) GREEN, Zerna, Theoretical elasticity, Clarendon, 1954.
- (14) SOKOLOKOFF, Tensor analysis, (2ª ed.), Wiley, 1964.
- (15) SAMPAIO, R., Geometria diferencial, Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Módulo I, LCC/CNPq, julho 1982.
- (16) BATHE, K.J., WILSON, E.L., Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall, 1976.
- (17) ZIENKIEWICZ, O.C., The finite element method in

- engineering science, 2^a ed., McGraw-Hill, 1971.
- (18) DESAI, C.S., ABEL, J.F., Introduction of the finite element method, Van Nostrand Reinhold Co., 1972.
 - (19) DHATT, G., TOUZHOT, G., Une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine-Presses de l'Université Laval, 1981.
 - (20) TIMOSHENKO, S.P., WOINOWSKY-KRIEGER, S., Theory of plates and shells, McGraw-Hill, 1959.
 - (21) TIMOSHENKO, S.P., MACCULLOUGH, G.H., Elements of strength of materials, Van Nostrand, 1949.
 - (22) SEIDE, P., Small elastic deformations of thin shells
 - (23) ALVES, M.K., Desenvolvimento de uma família simples de elementos finitos para vigas, placas e cascas incluindo o efeito da distorção transversal, Tese de Mestrado, Deptº de Engenharia Mecânica, PUC/RJ, agosto de 1983.
 - (24) YOUNG, D., Analysis of clamped rectangular plates, J. Appl. Mechanics, vol. 7, pp. A-139, 1940.
 - (25) ODLEY, E.G., Deflections and moments of a rectangular plate clamped on all edges and under hydrostatic pressure, J. Appl. Mechanics, vol. 14, pp. A-289, 1947.
 - (26) ROBINSON, J., HAGGENMACHER, G., Lora, an accurate four nodes stress plate bending element, Int. Num. Meth.

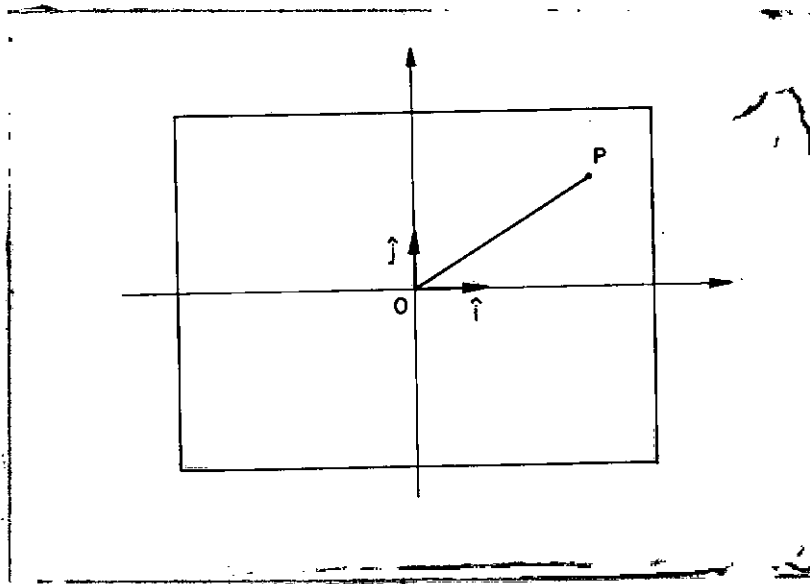
Engng., 14(2), 296-306 (1979).

- (27) ASHWELL, D.G., Strain elements, with applications to arches, rings and cylindrical shells, Chap. 6, Finite elements for thin shells & curved members, ed. Ashwell, D.G. & Gallagher, R.H., John Wiley, 1976.
- (28) ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L., TOO, J.M., Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, Int. Jour. for Num. Meth. in Eng., vol. 3, 275-290, 1971.
- (29) GRAFTON, P.E., STROMET, D.R., Analysis of axisymmetrical shells by direct stiffness method, AIAA Journal, vol. 1, nº 10.
- (30) CANTIN, G., CLOUGH, R.W., A curved, cylindrical-shell, finite element, AIAA Journal, vol. 6, nº 6, 1968.
- (31) FONDER, CLOUGH, R.W., Explicit addition of rigid body motions in curved finite elements, AIAA Journal, vol. 11, 1973.
- (32) BATOZ, J.L., An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element, Int. Jour. for Num. Meth. in Eng., vol. 18, 1077-1089, 1982.
- (33) STEINBRÜCK, P.L., Apostilas de Técnicas de Programação I, Curso de Análise de Sistemas, PUC/CCE, 1982.
- (34) GOUVEIA, J., FEIJÓO, R.A., "O sistema SDP", Relatório Interno, LNCC, Rio de Janeiro, 1985.
- (35) _____, Normas para Documentação Lógica, Relatório Interno, LNCC, Rio de Janeiro, 1985.

APÊNDICE A

PLACAS E CASCAS ANALISADAS. PROPRIEDADES DAS SUPERFÍCIES MÉDIAS

A.1. PLACA PLANA RETANGULAR



$$\vec{OP} = X \vec{i} + Y \vec{j}$$

Figura A.1 - Placa retangular. Superfície média

Coordenadas curvilíneas: sistema cartesiano ortogonal
 $\{X, Y\}$.

$$\theta^1 = X \quad ; \quad \theta^2 = Y$$

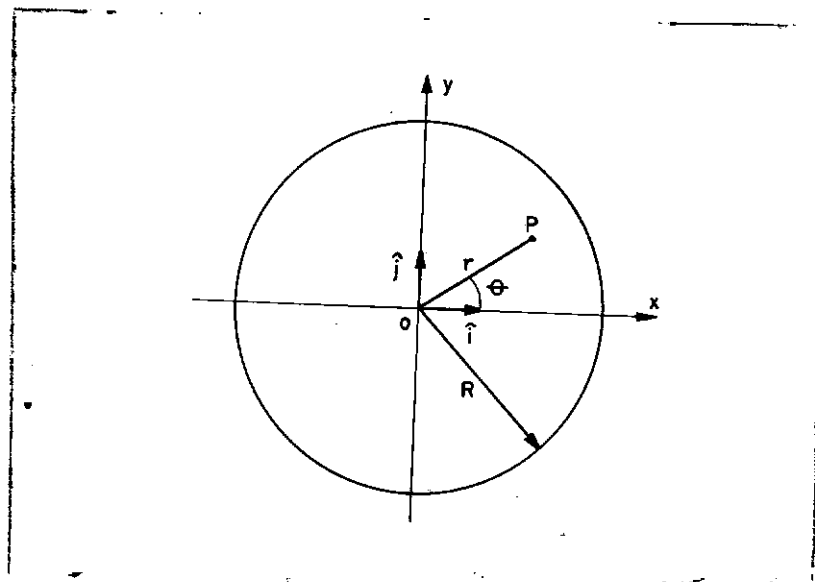
Raios de curvaturas principais da superfície média:

$$R_1 = \infty \quad ; \quad R_2 = \infty$$

Tensor métrico:

$$[a_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A.2. PLACA PLANA CIRCULAR



$$\vec{OP} = r \cdot \cos\theta \, \hat{i} + r \cdot \sin\theta \, \hat{j}$$

Figura A.2 - Placa circular. Superfície média

Coordenadas curvilíneas: sistema de coordenadas polares $\{r, \theta\}$

$$\theta^1 = r ; \quad \theta^2 = \theta$$

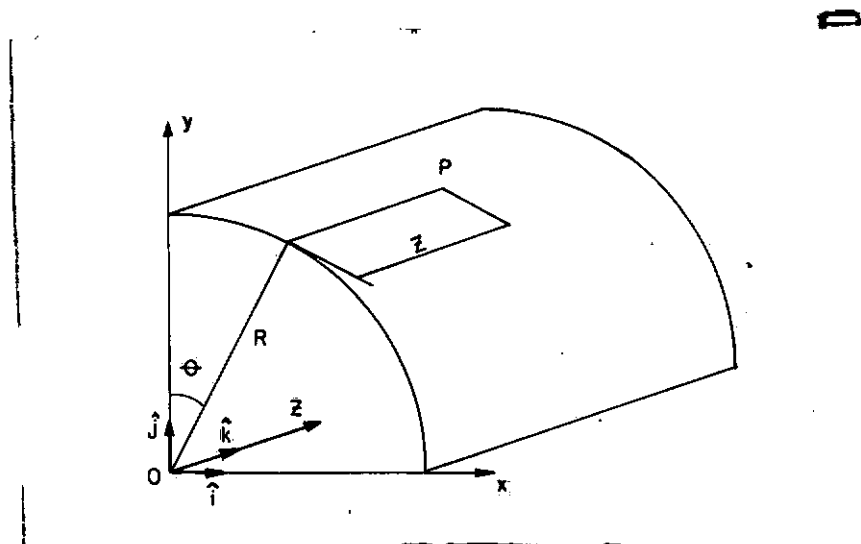
Raios de curvaturas principais da superfície média:

$$R_1 = \infty ; \quad R_2 = \infty$$

Tensor métrico:

$$[a_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix}$$

A.3. CASCA CILÍNDRICA



$$\underline{OP} = R \cdot \cos\theta \, \hat{i} + R \cdot \sin\theta \, \hat{j} + z \, \hat{k}$$

Figura A.3 - Casca cilíndrica. Superfície média

Coordenadas curvilíneas: sistema de coordenadas cilíndricas $\{Z, \theta\}$

$$\theta^1 = Z ; \quad \theta^2 = \theta$$

Raios de curvaturas principais da superfície média:

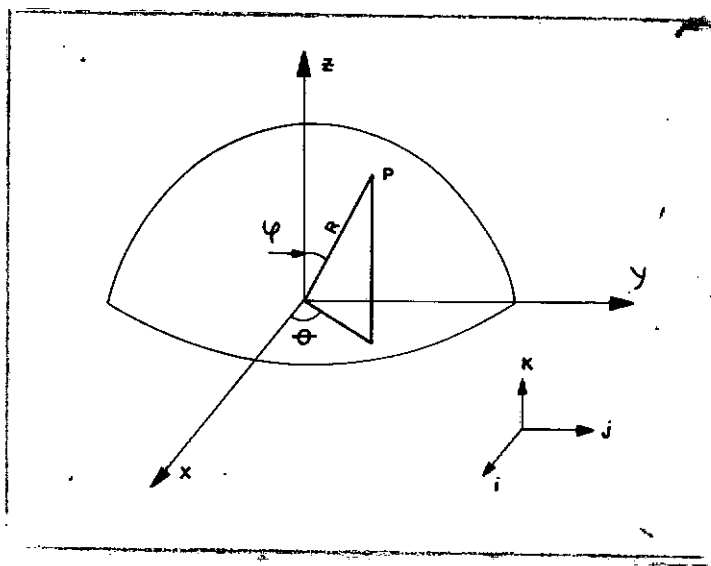
$$R_1 = \infty$$

$$R_2 = R \text{ (raio da superfície cilíndrica)}$$

Tensor métrico:

$$[a_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{vmatrix}$$

A.4. CASCA ESFÉRICA



$$\underline{OP} = R (\text{sen}\psi \cdot \cos\theta \, \hat{i} + \text{sen}\psi \cdot \text{sen}\theta \, \hat{j} + \cos\psi \, \hat{k})$$

Figura A.4 - Casca esférica. Superfície média

Coordenadas curvilíneas: sistema de coordenadas esféricas $\{\theta, \psi\}$

$$\theta^1 = \theta \quad ; \quad \theta^2 = \psi$$

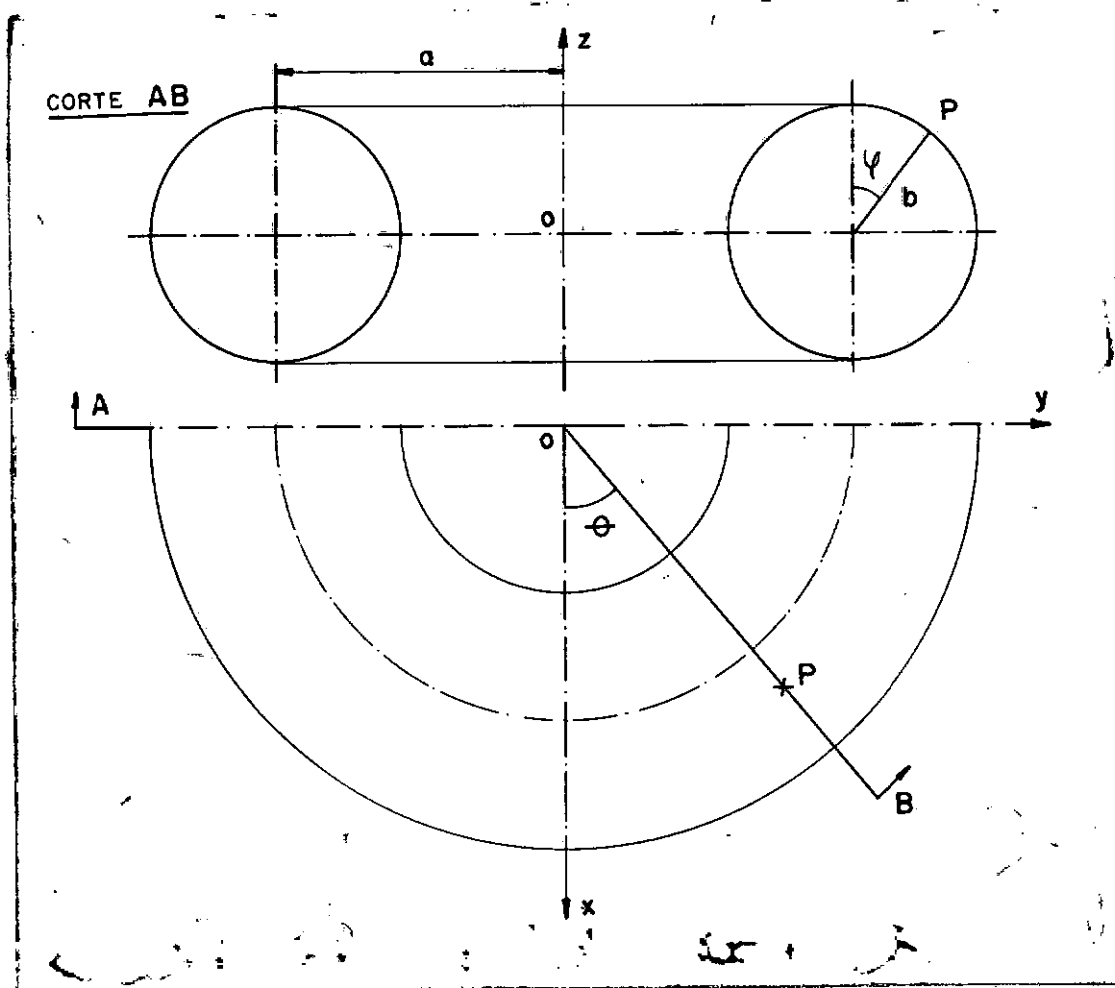
Raios de curvaturas principais da superfície média:

$$R_1 = R_2 = R \text{ (raio da superfície esférica)}$$

Tensor métrico:

$$[a_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} R \operatorname{sen}\psi & 0 \\ 0 & R \end{vmatrix}$$

A.5. CASCA TOROIDAL



$$\vec{OP} = (a + b \cdot \sin\psi) \cos\theta \vec{i} + (a + b \cdot \sin\psi) \sin\theta \vec{j} + b \cdot \cos\psi \vec{k}$$

Figura A.5 - Casca toroidal. Superfície média

Coordenadas curvilíneas: coordenadas $\{\theta, \psi\}$

$$\theta^1 = \theta \quad ; \quad \theta^2 = \psi$$

Raios de curvaturas principais da superfície média:

$$R_1 = (b \sin\psi + a) / \sin\psi$$

$$R_2 = b$$

$$\text{Curvaturas: } K_1 = 1/R_1 \quad ; \quad K_2 = 1/R_2$$

Tensor métrico:

$$[a_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} a + b \operatorname{sen}\psi & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$$

APÊNDICE B

INTEGRAIS DA RELAÇÃO CONSTITUTIVA

As seguintes integrais surgem nas derivações das relações constitutivas para placas e cascas (Cap. III):

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_2}{\rho_1} d\xi & J_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{\rho_1}{\rho_2} d\xi \\
 I_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \xi d\xi & J_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{\rho_1}{\rho_2} \xi d\xi \\
 I_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{\rho_2}{\rho_1} \xi^2 d\xi & J_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \xi^2 d\xi
 \end{aligned}$$

onde:

$$\rho_1 = (1 - \xi/R_1) ; \rho_2 = (1 - \xi/R_2)$$

R_1, R_2 = raios de curvaturas principais (direções θ^1/θ^2)

h - espessura da casca, suposta constante.

B.1. PLACAS PLANAS ($R_1 = R_2 = \infty$)

$$I_1 = J_1 = h$$

$$I_2 = J_2 = \phi$$

$$I_3 = J_3 = h^3/12$$

B.2. CASCAS CILÍNDRICAS ($R_1 = \infty$, $R_2 = R$)

$$I_1 = h$$

$$I_2 = -h^3/[12 \times R]$$

$$I_3 = h^3/12$$

$$J_1 = R [\ln^* ((1 + h/2R)/(1 - h/2R))]$$

$$J_2 = R [R \ln ((1 + h/2R)/(1 - h/2R)) - h]$$

$$J_3 = R^2 [R \ln ((1 + h/2R)/(1 - h/2R)) - h]$$

* $\ln(x)$ = logaritmo natural de x.

B.3. CASCAS DE DUPLA CURVATURA

$$I_1 = \left[\frac{R_1}{R_2} \right] \left\{ \ln \left[\frac{1 + h/2 R_1}{1 - h/2 R_1} \right] (R_2 - R_1) + h \right\}$$

$$I_2 = \left[\frac{R_1}{R_2} \right] (R_2 - R_1) \left\{ R_1 \ln \left[\frac{1 + h/2 R_1}{1 - h/2 R_1} \right] - h \right\}$$

$$I_3 = \left[\frac{R_1}{R_2} \right] \left\{ \frac{h^3}{12} + (R_1 - R_2) R_1 \left[h - R_1 \ln \left[\frac{1 + h/2 R_1}{1 - h/2 R_1} \right] \right] \right\}$$

J_1 , J_2 e J_3 podem ser obtidos permutando-se R_1 e R_2 nas respectivas integrais (I_i).

B.4. CASCAS DE DUPLA CURVATURA - FORMULAÇÃO APROXIMADA

Os limites das integrais (I_i) e (J_i) em (B.3), quando R_1 e R_2 tendem a valores infinitos, divergem devido a erros de truncamento no cálculo das expressões logarítmicas. Desenvolvemos expressões aproximadas para a relação constitutiva tais que possam ser aplicadas às superfícies toroidais ($R \leq R_1 < \infty$; $R_2 = r$).

Expandindo em Taylor as integrais (I_i) e (J_i) desenvolvidas em (B.3) até a ordem (h^3) encontramos:

$$\bar{I}_1 = h + \frac{h^3}{12} k_1 [k_1 - k_2]$$

$$\bar{I}_2 = [k_1 - k_2] \frac{h^3}{12}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{h^3}{12} \quad ; \quad \text{sendo } K_\alpha = 1/R_\alpha \quad (\alpha = 1, 2)$$

As integrais (\bar{J}_i) são análogamente obtidas permutando-se as curvaturas (k_1) e (k_2) nas expressões (\bar{I}_i) .

APÊNDICE C

A FASE COMPUTACIONAL. UMA EXPERIÊNCIA EM PROGRAMAÇÃO MODULAR E ESTRUTURADA

As rotinas implementadas neste trabalho formam parte da biblioteca de elementos finitos do Sistema de Desenvolvimento de Programas (SDP). O sistema SDP é constituído de um conjunto de subsistemas, utilitários e gerenciadores voltados ao desenvolvimento de programas em elementos finitos e áreas afins. Foi um trabalho desenvolvido por Jayme Gouveia junto ao LNCC/CNPq sob orientação de Raul A. Feijóo (veja GOUVEIA, FEIJÓO (34)).

No sistema SDP atenção especial foi dedicada à utilização de técnicas modernas em programação estruturada e modular assim como elaborado normas para documentação e programação GOUVEIA, FEIJÓO (35). Evidenciou-se, com a utilização deste sistema, uma rápida e eficiente implementação das rotinas desenvolvidas neste trabalho.

A parte computacional da tese consistiu especificamente em etapas relativamente bem nítidas:

- análise do problema de placas e cascas pelo método

dos elementos finitos;

- programação/implementação;

- depuração/testes.

Na fase de análise desenvolveu-se a estrutura hierárquica básica das rotinas a serem implementadas.

Uma vez definidos os módulos funcionais da estrutura desenvolveu-se, por refinamentos sucessivos, os respectivos pseudo-códigos (descrição dos procedimentos em linguagem estruturada). Ênfase especial foi dedicada na elaboração de uma eficiente documentação, esta tornando-se comentários na fase de codificação (Programação FORTRAN). Parte apreciável dos erros lógicos e problemas de interfaces entre módulos foram solucionados nesta etapa.

Concluída a análise, sucedeu-se a codificação e implementação dos módulos sendo adotada a técnica "*botton-up*" STEINBRÜCK (33). Os módulos foram efetivamente implementados como subrotinas e seus procedimentos lógicos estruturados, simulados em linguagem FORTRAN.

A implementação "*botton-up*" possibilitou uma excelente depuração dos módulos funcionais, independente da estrutura global do programa.

Definiu-se módulos "*drivers*" e foram montados arquivos para os testes de caixa preta STEINBRÜCK (33).

Com a adoção desta técnica evidenciou-se uma rápida depuração dos códigos desenvolvidos e foram detectados poucos erros propagando-se ao longo da estrutura global.

Considerações:

A metodologia empregada apresentou as seguintes vantagens:

- A decomposição em módulos funcionais resultou em uma compreensão apreciável da estrutura global do programa. A programação estruturada dos módulos tornou, por sua vez, bem claros e precisos os seus respectivos procedimentos lógicos.

- A implementação "botton-up" dos módulos funcionais e a depuração destes independente da estrutura global do programa minimizaram apreciavelmente os erros encontrados nas etapas finais de programação. Os erros encontrados foram em geral facilmente detectados e solucionados.

Porém alguns problemas foram também detectados:

- O processo de geração de códigos foi lento, poucos resultados foram obtidos a curto prazo e portanto a produtividade de parecendo pequena gerou problemas quanto à motivação.

- Os módulos funcionais foram em sua maior parte implementados como subrotinas. Houve conseqüentemente a criação de um número elevado de subrotinas acarretando uma geração considerável de documentação e refletindo no consumo apreciável de memória em disco.

Para concluir, nos é relevante comentar que de forma geral as desvantagens encontradas foram enormemente compensadas principalmente no tocante à fase de depuração.

Resta-nos também elogios às rotinas de tratamento de erros e depuração implementadas no SDP que tiveram fundamental

importância na depuração em diversas fases da programação e testes do elemento. Os blocos funcionais e as rotinas de alocação de área, recuperação e armazenamento de tabelas do sistema SDP sem dúvida tiveram também considerável contribuição não só nas fases de programação e elaboração do programa mas como também na depuração deste.